「行間を埋める」ために

- この別冊 PDF ファイルは『**手を動かしてまなぶ　線形代数**』（裳華房，2015 年刊）の本文中の ✍ のマークについて，その行間を埋めるための具体的なやり方を一例としてまとめたものです．
- この別冊 PDF ファイルを印刷して利用するときは，**「小冊子」モード**で印刷して二つ折にすると，A5 判サイズで本の巻末に挟み込んで利用することができます．
- この別冊内の見出しの「p. ○ 下から○行目」という表記では，該当書籍の対応するページ内の**脚注は行数にカウントしていません．**
- 数学書は証明や計算の細部が省略されていることが多いため，精読する際はペンと紙を用意して，**自分で詳細を計算すること**が極めて重要です．論理の行間を埋めていくことで数学の基礎体力がついてきます．
- 証明や計算の論理を追うときは **1 行 1 行疑ってかかる**くらいの態度で望みましょう．
- 論理の行間を埋めた後は，**その数学的内容を改めて見直してみましょう**．定義や定理の主張はなにか，仮定はなぜ必要なのか，証明した定理の具体例を上げることができるかなど，時間をかけてじっくりと味わうことが大切です．そうしないと**木を見て森を見ず**という状態に陥ったまま先へ進むことになりがちです．間違ってもよいので，慌てずに．
- 読者が手を動かしながら本書の隅々まで習熟され，線形代数の奥深い世界を自由に開拓していけますように．健闘を祈ります．

(2022 年 2 月 14 日版)

§2 の ✍ のマーク

p.19 下から 8 行目　(1) $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$ とすると，
$\left({}^t(A+B)\text{ の }(i,j)\text{ 成分}\right)=(A+B\text{ の }(j,i)\text{ 成分})=a_{ji}+b_{ji}=(A\text{ の }(j,i)\text{ 成分})+(B\text{ の }(j,i)\text{ 成分})=\left({}^tA\text{ の }(i,j)\text{ 成分}\right)+\left({}^tB\text{ の }(i,j)\text{ 成分}\right)=\left({}^tA+{}^tB\text{ の }(i,j)\text{ 成分}\right)$
である．よって，(1) がなりたつ．

(2) $A=(a_{ij})_{l\times m}$，$B=(b_{jk})_{m\times n}$ とすると，$\left({}^t(AB)\text{ の }(k,i)\text{ 成分}\right)=$
$(AB\text{ の }(i,k)\text{ 成分})=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}=\sum_{j=1}^{m}b_{jk}a_{ij}=\left({}^tB\,{}^tA\text{ の }(k,i)\text{ 成分}\right)$ である．
よって，(2) がなりたつ．

(3) $A=(a_{ij})_{m\times n}$ とすると，$\left({}^t(cA)\text{ の }(i,j)\text{ 成分}\right)=(cA\text{ の }(j,i)\text{ 成分})=ca_{ji}$
$=c\left({}^tA\text{ の }(i,j)\text{ 成分}\right)$ である．よって，(3) がなりたつ．

§3 の ✍ のマーク

p.27 下から 5 行目 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot x + 3\cdot y \\ 1\cdot x + 2\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x+2y \end{pmatrix}$ である．

よって，(3.16) は (3.17) と同値である．

§7 の ✍ のマーク

p.66 下から 9 行目

$$\begin{aligned}
&\Big(\begin{pmatrix} k_1 & k_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_{r-1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} k_1 & k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}\Big)(k_1) \\
&\quad = \Big(\begin{pmatrix} k_1 & k_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_{r-1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} k_1 & k_3 \end{pmatrix}\Big)(k_2) = k_2, \\
&\Big(\begin{pmatrix} k_1 & k_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_{r-1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} k_1 & k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}\Big)(k_2) \\
&\quad = \Big(\begin{pmatrix} k_1 & k_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_{r-1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} k_1 & k_3 \end{pmatrix}\Big)(k_1) \\
&\quad = \Big(\begin{pmatrix} k_1 & k_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_{r-1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} k_1 & k_4 \end{pmatrix}\Big)(k_3) = k_3, \\
&\quad \cdots, \\
&\Big(\begin{pmatrix} k_1 & k_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_{r-1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} k_1 & k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}\Big)(k_r) = \begin{pmatrix} k_1 & k_r \end{pmatrix}(k_r) = k_1
\end{aligned}$$

となる．よって，(7.18) がなりたつ．

p.69 上から 4 行目 互換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ をかけることにより，n 文字の偶置換全体の集合から n 文字の奇置換全体の集合への 1 対 1 の対応が得られる．よって，S_n の中で偶置換の個数と奇置換の個数は等しい．ここで，S_n の元の個数は $n!$ なので，S_n の中で偶置換および奇置換の個数はともに $\dfrac{n!}{2}$ である．

§8 の ✍ のマーク

p.76 下から 8 行目 定理 8.2 より，

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{a}_i & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & c\boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + c\cdot 0 \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

である．同様に，定理 8.5 より，1 つの行に他の行の何倍かを加えても，行列式は変わらない．

§10 の ✍ のマーク

p.92 下から 7 行目　$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_1 = x_2 - x_1$ となり，(10.1) がなりたつ．

§11 の ✍ のマーク

p.102 上から 10 行目　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を二辺とする三角形に対して余弦定理を用いると，

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$$

がなりたつ．よって，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta &= \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - \left\{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2\right\}\right] \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle
\end{aligned}$$

である．すなわち，(11.5) がなりたつ．

p.106 上から 2 行目　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を二辺とする平行四辺形を平行六面体の底面として考える．このとき，底面と $\boldsymbol{c}$ のなす角を φ $(0 < \varphi < \pi)$，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角 θ とすると，$\sin\varphi = |\cos\theta|$ である．よって，平行六面体の体積は

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\| \sin\varphi = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\||\cos\theta| = \left|\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle\right|$$

である．

§12 の ✍ のマーク

p.121 上から 1 行目　［⇨より詳しくは，姉妹書『**手を動かしてまなぶ 微分積分**』の例題 8.3 を参考にするとよい．］　まず，$f(x) = \sin x$ とおくと，任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して，$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$ となる．よって，

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}), \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

である．また，$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)\right| \leq 1$ である．したがって，マクローリン展開

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ がなりたつ．

次に，$g(x) = \cos x$ とおくと，任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して，$g^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$ となる．よって，

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & (n \text{ は偶数}), \\ 0 & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

である．また，$\left|g^{(n)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)\right| \leq 1$ である．したがって，マクローリン展開 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ がなりたつ．

§13 の ✍ のマーク

p.128 上から 9 行目　定義 13.1 の (6) において，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ とおくと，$c(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$ である．さらに，定義 13.1 の (3) より，$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ なので，$c\mathbf{0} = c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$ となる．ここで，$c\mathbf{0}$ の逆ベクトル $-c\mathbf{0}$ が存在するので，

$$\mathbf{0} = c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0}) = (c\mathbf{0} + c\mathbf{0}) + (-c\mathbf{0}) = c\mathbf{0} + \left\{c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0})\right\} = c\mathbf{0} + \mathbf{0} = c\mathbf{0}$$

となる．すなわち，$c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ である．

p.128 下から 7 行目　部分空間の条件 (2), (3) より，V の和およびスカラー倍はそれぞれ W の和およびスカラー倍を定めることに注意する．

定義 13.1 の (1), (2), (4)〜(7) の条件　V は定義 13.1 の (1), (2), (4)〜(7) の条件をみたすので，W も定義 13.1 の (1), (2), (4)〜(7) の条件をみたす．

定義 13.1 の (3) の条件　部分空間の条件 (1) より，$\mathbf{0} \in W$ である．また，$\mathbf{0}$ は V の零ベクトルであり，V は定義 13.1 の (3) の条件をみたす．よって，$\mathbf{0}$ は W の零ベクトルとなり，W は定義 13.1 の (3) の条件をみたす．

定義 13.1 の (8) の条件　V は定義 13.1 の (8) の条件をみたし，$\mathbf{0}$ は W の零ベクトルでもあるので，W は定義 13.1 の (8) の条件をみたす．

§15 の ✍ のマーク

p.153 上から 3 行目　部分空間の条件 (1)〜(3) を確かめればよい．また，$M_n(\mathbf{R})$ の零ベクトルは零行列 O であることに注意する．

(1) 部分空間の条件 (1)　${}^tO = O$ なので，O は対称行列である．よって，$O \in W$ である．

部分空間の条件 (2)　$X, Y \in W$ とすると, ${}^tX = X, {}^tY = Y$ である．よって, ${}^t(X+Y) = {}^tX + {}^tY = X + Y$ となる．したがって，$X + Y \in W$ である．

部分空間の条件 (3)　$c \in \mathbf{R}$ とする．また，$X \in W$ とすると，${}^tX = X$ である．よって，${}^t(cX) = c\,{}^tX = cX$ となる．したがって，$cX \in W$ である．

(2) 部分空間の条件 (1)　${}^tO = O = -O$ なので，O は交代行列である．よって，$O \in W$ である．

部分空間の条件 (2)　$X, Y \in W$ とすると，${}^tX = -X$，${}^tY = -Y$ である．よって，${}^t(X+Y) = {}^tX + {}^tY = -X - Y = -(X+Y)$ となる．したがって，$X + Y \in W$ である．

部分空間の条件 (3)　$c \in \mathbf{R}$ とする．また，$X \in W$ とすると，${}^tX = -X$ である．よって，${}^t(cX) = c\,{}^tX = c(-X) = -cX$ となる．したがって，$cX \in W$ である．

(3) 部分空間の条件 (1)　零行列は上三角行列なので，$O \in W$ である．

部分空間の条件 (2)　$X = (x_{ij})_{n\times n}, Y = (y_{ij})_{n\times n} \in W$ とすると，$i > j$ のとき，$x_{ij} = y_{ij} = 0$ である．よって, $i > j$ のとき, $x_{ij} + y_{ij} = 0$ である．したがって, $X + Y \in W$ である．

部分空間の条件 (3)　$c \in \mathbf{R}$ とする．また，$X = (x_{ij})_{n\times n} \in W$ とすると，$i > j$ のとき，$x_{ij} = 0$ である．よって，$i > j$ のとき，$cx_{ij} = 0$ である．したがって，$cX \in W$ である．

(4) 部分空間の条件 (1)　$\operatorname{tr} O = 0$ なので，$O \in W$ である．

部分空間の条件 (2)　$X, Y \in W$ とすると，$\operatorname{tr} X = \operatorname{tr} Y = 0$ である．よって，$\operatorname{tr}(X + Y) = \operatorname{tr} X + \operatorname{tr} Y = 0 + 0 = 0$ となる．したがって，$X + Y \in W$ である．

部分空間の条件 (3)　$c \in \mathbf{R}$ とする．また，$X \in W$ とすると，$\operatorname{tr} X = 0$ である．よって，$\operatorname{tr}(cX) = c \operatorname{tr} X = c \cdot 0 = 0$ となる．したがって，$cX \in W$ である．

§17 の ✍ のマーク

p.169 上から 3 行目　$m = 1$ のとき，定義 17.1 の (2) より，(17.8) がなりたつ．$m = k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ のとき，(17.8) がなりたつと仮定する．このとき，

[⇨ スペースの関係上，次のページに続きます]

$$
\begin{aligned}
&f(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) \\
&\qquad = f\big((c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k) + c_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}\big) \\
&\qquad = f(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k) + f(c_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) \\
&\qquad = c_1 f(\boldsymbol{x}_1) + c_2 f(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + c_k f(\boldsymbol{x}_k) + c_{k+1} f(\boldsymbol{x}_{k+1})
\end{aligned}
$$

となる．よって，$m = k+1$ のとき，(17.8) がなりたつ．したがって，任意の $m = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，(17.8) がなりたつ．

§18 の ✍ のマーク

p186 上から 8 行目　E を n 次の単位行列とすると，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} E \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．よって，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ である．同様に，$Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$ である．

p187 下から 4 行目　$f + g \in \mathrm{Hom}(V, W)$　まず，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in V$ とすると，$f,\ g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ より，

$$
\begin{aligned}
(f+g)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\
&= \big(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})\big) + \big(g(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{y})\big) \\
&= \big(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\big) + \big(f(\boldsymbol{y}) + g(\boldsymbol{y})\big) \\
&= (f+g)(\boldsymbol{x}) + (f+g)(\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

である．すなわち，$(f+g)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (f+g)(\boldsymbol{x}) + (f+g)(\boldsymbol{y})$ である．さらに，$c \in \mathbf{R}$ とすると，$f,\ g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ より，

$$
\begin{aligned}
(f+g)(c\boldsymbol{x}) &= f(c\boldsymbol{x}) + g(c\boldsymbol{x}) \\
&= cf(\boldsymbol{x}) + cg(\boldsymbol{x}) \\
&= c\big(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\big) \\
&= c(f+g)(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

である．すなわち，$(f+g)(c\boldsymbol{x}) = c(f+g)(\boldsymbol{x})$ である．よって，$f + g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ である．

$cf \in \mathrm{Hom}(V, W)$　まず，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ とすると，$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ より，

$$\begin{aligned}(cf)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= cf(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ &= c\bigl(f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})\bigr) \\ &= cf(\boldsymbol{x})+cf(\boldsymbol{y}) \\ &= (cf)(\boldsymbol{x})+(cf)(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

である．すなわち，$(cf)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (cf)(\boldsymbol{x})+(cf)(\boldsymbol{y})$ である．さらに，$d \in \mathbf{R}$ とすると，$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ より，

$$(cf)(d\boldsymbol{x}) = cf(d\boldsymbol{x}) = c\bigl(df(\boldsymbol{x})\bigr) = d\bigl(cf(\boldsymbol{x})\bigr)) = d(cf)(\boldsymbol{x})$$

である．すなわち，$(cf)(d\boldsymbol{x}) = d(cf)(\boldsymbol{x})$ である．よって，$cf \in \mathrm{Hom}(V, W)$ である．

定義 13.1 の (1) の条件　f, $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}) = (g+f)(\boldsymbol{x})$$

となる．すなわち，$(f+g)(\boldsymbol{x}) = (g+f)(\boldsymbol{x})$ である．よって，$f+g = g+f$ である．したがって，$\mathrm{Hom}(V, W)$ は定義 13.1 の (1) の条件をみたす．

定義 13.1 の (2) の条件　f, g, $h \in \mathrm{Hom}(V, W)$，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，

$$\begin{aligned}\bigl((f+g)+h\bigr)(\boldsymbol{x}) &= (f+g)(\boldsymbol{x})+h(\boldsymbol{x}) \\ &= \bigl(f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})\bigr)+h(\boldsymbol{x}) \\ &= f(\boldsymbol{x})+\bigl(g(\boldsymbol{x})+h(\boldsymbol{x})\bigr) \\ &= \bigl(f+(g+h)\bigr)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となる．すなわち，$\bigl((f+g)+h\bigr)(\boldsymbol{x}) = \bigl(f+(g+h)\bigr)(\boldsymbol{x})$ である．よって，$(f+g)+h = f+(g+h)$ である．したがって，$\mathrm{Hom}(V, W)$ は定義 13.1 の (2) の条件をみたす．

定義 13.1 の (3) の条件　$\mathbf{0} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ を零写像とする．このとき，$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ とすると，定義 13.1 の (1) の条件より，$f+\mathbf{0} = \mathbf{0}+f$ である．さらに，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(f+\mathbf{0})(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})+\mathbf{0}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})+\mathbf{0}_W = f(\boldsymbol{x})$ となる．すなわち，$(f+\mathbf{0})(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ である．よって，$f+\mathbf{0} = f$ である．したがって，$f+\mathbf{0} = \mathbf{0}+f = f$ となり，$\mathrm{Hom}(V, W)$ は定義 13.1 の (3) の条件をみたす．

定義 13.1 の (4) の条件　$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$，c, $d \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，

$$\bigl(c(df)\bigr)(\boldsymbol{x}) = c(df)(\boldsymbol{x}) = c\bigl(df(\boldsymbol{x})\bigr) = (cd)f(\boldsymbol{x}) = \bigl((cd)f\bigr)(\boldsymbol{x})$$

となる．すなわち，$(c(df))(\boldsymbol{x}) = ((cd)f)(\boldsymbol{x})$ である．よって，$c(df) = (cd)f$ である．したがって，$\mathrm{Hom}(V, W)$ は定義 13.1 の (4) の条件をみたす．

定義 13.1 の (5) の条件　$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$，$c,\ d \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，

$$\big((c+d)f\big)(\boldsymbol{x}) = (c+d)f(\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}) + df(\boldsymbol{x}) = (cf)(\boldsymbol{x}) + (df)(\boldsymbol{x}) = (cf+df)(\boldsymbol{x})$$

となる．すなわち，$((c+d)f)(\boldsymbol{x}) = (cf+df)(\boldsymbol{x})$ である．よって，$(c+d)f = cf + df$ である．したがって，$\mathrm{Hom}(V, W)$ は定義 13.1 の (5) の条件をみたす．

定義 13.1 の (6) の条件　$f,\ g \in \mathrm{Hom}(V, W)$，$c \in \mathbf{R}$，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，

$$\begin{aligned}\big(c(f+g)\big)(\boldsymbol{x}) &= c(f+g)(\boldsymbol{x}) \\ &= c\big(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\big) \\ &= cf(\boldsymbol{x}) + cg(\boldsymbol{x}) \\ &= (cf)(\boldsymbol{x}) + (cg)(\boldsymbol{x}) \\ &= (cf+cg)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となる．すなわち，$\big(c(f+g)\big)(\boldsymbol{x}) = (cf+cg)(\boldsymbol{x})$ である．よって，$c(f+g) = cf + cg$ である．したがって，$\mathrm{Hom}(V, W)$ は定義 13.1 の (6) の条件をみたす．

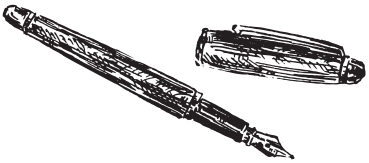
定義 13.1 の (7) の条件　$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(1f)(\boldsymbol{x}) = 1 \cdot f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ となる．すなわち，$(1f)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ である．よって，$1f = f$ である．したがって，$\mathrm{Hom}(V, W)$ は定義 13.1 の (7) の条件をみたす．

定義 13.1 の (8) の条件　$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(0f)(\boldsymbol{x}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W$ となる．すなわち，$(0f)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W$ である．よって，$0f = \mathbf{0}$ である．したがって，$\mathrm{Hom}(V, W)$ は定義 13.1 の (8) の条件をみたす．

§20 の ✍ のマーク

p.208 上から 8 行目　$b = 0$ のとき，(20.30) より，任意の $X \in W$ に対して，$f(X) = aX$ である．よって，$W(a) = W$ である．$b \neq 0$ のとき，$f(X) = (a \pm b)X$ $(X \in W)$ とすると，(20.30) より，$ax_1 + bx_2 = (a \pm b)x_1$，$ax_2 + bx_1 = (a \pm b)x_2$（複号同順）である．よって，$b \neq 0$ より，$x_2 = \pm x_1$ である．したがって，$k = x_1$ とおくと，$X = k(E_1 \pm E_2)$ となり，(20.33) が得られる．

§ 22 の ✍ のマーク

p.232 上から 11 行目（第 1 版〜第 5 版）　「手のマーク」（✍）を参考文献の引用に変更する［⇨ 正誤表（https://www.shokabo.co.jp/errata/1564/1564errata.pdf）参照］.

（お疲れさまでした）【終】