本質から理解する数学的手法
− 練習問題（問題編）−

東京理科大学　理学部応用物理学科
荒木修 ＋ 齋藤智彦

2017 年 1 月 5 日

この文書は,「本質から理解する数学的手法」をより深く理解するための練習問題です．順次書き足していきたいと考えています.

§練習問題

第 1 章　基本の「き」

練習問題 1.1

$\sin 5^\circ$ に対して，$\sin x \cong x$ の近似計算が使えるだろうか？ $\sin 5^\circ \cong 5^\circ$ なのだろうか？実際に計算し，電卓の結果とも比べてみなさい.

練習問題 1.2

2016 年 11 月 15 日の「スーパームーン」（＝ 1 年で一番地球に近づくときの月）では，月の見かけの直径が通常の 1.14 倍となった．月の明るさは何倍となっただろうか．小数点以下第 2 位まで求めなさい.

第 2 章　テイラー展開

練習問題 2.1

$e^{0.1}$ を小数点以下第 1 位まで計算しなさい.

練習問題 2.2

次の問に答えなさい.

(1) $\dfrac{1}{1-x}$ のテイラー展開を求めなさい.

(2) 前問で求めた級数の収束半径を求めなさい.

(3) 前問で求めた収束半径上で $\dfrac{1}{1-x}$ のべき級数は収束するかを答えなさい.

第 3 章　多変数・ベクトル関数の微分

練習問題 3.1

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ かつ $r = |\boldsymbol{r}|$，n を 0 でない整数として，$\boldsymbol{\nabla} r^n$ を計算しなさい．

練習問題 3.2

$f(u) = \sin u,\ u = g(x, y) = x^2 + y^2$ とする．$\boldsymbol{\nabla} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を求めなさい．

練習問題 3.3

$f(\boldsymbol{r}) = f(x, y) = \exp\left(\dfrac{-2x^2 + y^2}{100}\right)$，$\boldsymbol{r} = (5\cos t, 5\sin t)$ とする．$\dfrac{df(\boldsymbol{r}(t))}{dt}$ を求めなさい．

練習問題 3.4

$f(x, y) = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする．$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ で表しなさい．

第 4 章　線積分・面積分・体積積分

練習問題 4.1

平面上の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y)$ として，$f(\boldsymbol{r}) = ax^2 - by^2$ を考えます．また，図 1 のように，原点を中心として半径が R の円の円周上を通って，点 $(R, 0)$ から点 $(0, R)$ へ至る経路を C とします．

(1) 2 次元極座標 (r, θ) を用いると $d\ell = \left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\right| d\theta$ と書けます．$d\ell$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\int_{\mathrm{C}} f(\boldsymbol{r})\, d\ell$ を計算しなさい．

(3) $\displaystyle\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算しなさい．

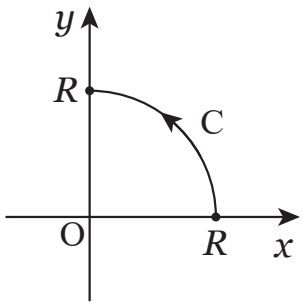


図 1　経路 C

練習問題 4.2

平面上の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y)$ として，ベクトル場

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

を考えます（本文の例題 3.6 と同じ形のベクトル場です）．この $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を，図 2 のような，xy 平面上の 2 つの経路 C_1 と C_2（$=\mathrm{C}_{2(1)}+\mathrm{C}_{2(2)}+\mathrm{C}_{2(3)}$）に沿って線積分し，2 つの結果を比較しなさい．

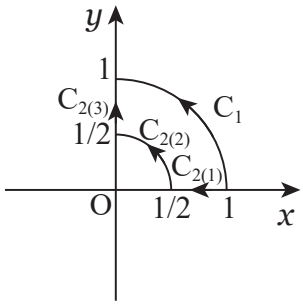


図 2　2 つの経路

練習問題 4.3

xy 平面上で，原点を中心とし半径 R の円の円周及び内部の領域を S_1 とします．このとき，**練習問題 4.1** の $f(\boldsymbol{r})$ について，$\displaystyle\int_{\mathrm{S}_1} f(\boldsymbol{r})\,dS$ を計算しなさい．

練習問題 4.4

空間内の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ として，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=(ax,by,cz)$ を考えます．また，原点を中心とする半径 R の球面を S_2 とします．

(1) $\boldsymbol{e}_r$ を $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルとすると，S_2 上では $d\boldsymbol{S}=dS\boldsymbol{e}_r$ と表せます．そこで，3 次元極座標 (r,θ,φ) を用いて $d\boldsymbol{S}$ を表しなさい．

(2) $\displaystyle\int_{\mathrm{S}_2} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算しなさい．

練習問題 4.5

x,y,z をうまく変数変換することで，楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$ の体積を求めなさい．

練習問題 4.6

図 3 のように，密度 ρ_0〔kg/m^3〕，半径 R〔m〕の球の一部を半径 $R/4$〔m〕の球状にくり抜き，その部分を密度 ρ_1〔kg/m^3〕の別の物質で埋めた物体を考えます．ここで ρ_0，ρ_1 は一定とし，密度 ρ_1 の球の中心は $\boldsymbol{r}_1=(R/2,0,0)$ であるとします．この物体の重心 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ を求めなさい．

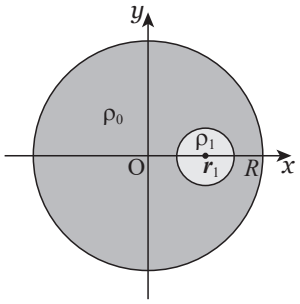


図 3　2 つの密度の部分を持つ物体

第 5 章　ベクトル場の発散と回転

練習問題 5.1

任意のスカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ について，$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0}$ が成立することを示しなさい．

練習問題 5.2

任意のスカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ とベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ について，$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot\boldsymbol{A}+\phi\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})$ が成立することを示しなさい．なお，$\phi(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の $(\boldsymbol{r})$ は煩雑なので省略しています．

練習問題 5.3

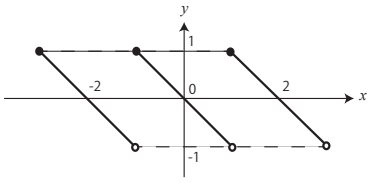
任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ について，$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}$ が成立することを示しなさい．ただし $\boldsymbol{\nabla}^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ です．なお，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の $(\boldsymbol{r})$ は煩雑なので省略しています．また，この式の右辺第 1 項の $\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})$ は「$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ の発散」ではなくて「$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ の勾配」の意味ですので注意してください．

第 6 章　フーリエ級数・変換とラプラス変換

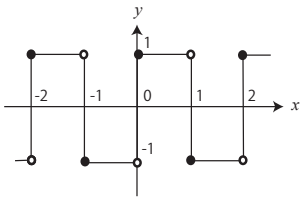
練習問題 6.1

次の周期関数のフーリエ級数を計算しなさい．

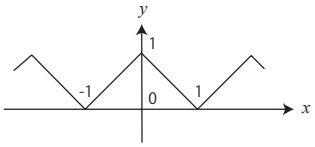
(1) $f(x)=-x \qquad (-1\le x<1)$



(2) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{if } -1\le x<0\\ 1 & \text{if } 0\le x<1\end{cases}$

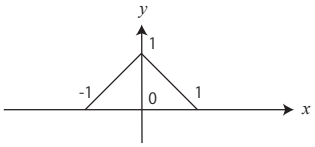


(3) $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{if } -1\le x<0\\ -x+1 & \text{if } 0\le x<1\end{cases}$



練習問題 6.2

(1) 下図の局在する三角波をフーリエ変換し、結果を図示しなさい.



(2) 関数 $f(t) = e^{-a|t|}$ をフーリエ変換しなさい．ただし，a は正の定数とする.

(3) 関数 $f(t) = e^{-at^2}$ をフーリエ変換しなさい．ただし，a は正の定数とする.

練習問題 6.3

図 4 に示す抵抗とコンデンサーから構成される回路について，次の問に答えなさい．ただし，最初はコンデンサーに電荷はたまっていないとする.

(1) 時間の関数である入力電圧 $v_1(t)$ に対して，出力電圧を $v_2(t)$ とするとき，$v_1(t)$ と $v_2(t)$ の満たす微分方程式を求め，それをラプラス変換しなさい．ただし，$v_1(t)$ と $v_2(t)$ をラプラス変換した関数を各々 $V_1(s)$、$V_2(s)$ とする.

(2) $V_2(s)/V_1(s)$ を求めなさい.

　なお，制御理論ではこれを伝達関数と呼びます．伝達関数は回路の構造で決まる式であり，伝達関数に入力のラプラス変換をかけると出力のラプラス変換が得られます．それを逆ラプラス変換すると時間を変数とする出力が得られる，というわけです.

(3) ステップ関数 (時刻 $t = 0$ 以降に値 $v_1 = 1$ をとり，それ以前は 0) を入力電圧として与えたときの出力電圧 (時間 t の関数) を求めなさい.

(4) 同様に，時刻 $t = 0$ から時間 T の間だけ $v_1 = 1$ という矩形波が入力されたときの出力電圧を求めなさい.

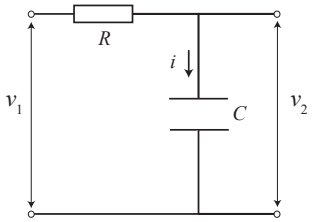


図 4　RC 回路

第 7 章　微分方程式

練習問題 7.1

図 5 のように Q(C) の電荷がチャージされた電気容量 C のコンデンサに，$t = 0$ の時刻に自己インダクタン

ス L(H) のコイルをつないだとする．この回路の電流の時間変化 $i(t)$ を，微分方程式を解くことによって求めなさい (参考：例題 6.2).

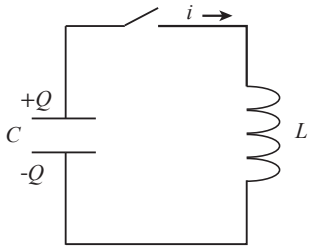


図 5　LC 回路

第 8 章　行列と線形代数

未補充

第 9 章　群論の初歩

未補充