# 「行間を埋める」ために

- この別冊 PDF ファイルは『**手を動かしてまなぶ　集合と位相**』（裳華房，2020 年刊）の本文中の ✍ のマークについて，その行間を埋めるための具体的なやり方を一例としてまとめたものです．
- この別冊 PDF ファイルを印刷して利用するときは，**「小冊子」モード**で印刷して二つ折にすると，A5 判サイズで本の巻末に挟み込んで利用することができます．
- この別冊内の見出しの「p. ○ 下から○行目」という表記では，該当書籍の対応するページ内の**脚注は行数にカウントしていません．**
- 数学書は証明や計算の細部が省略されていることが多いため，精読する際はペンと紙を用意して，**自分で詳細を計算すること**が極めて重要です．論理の行間を埋めていくことで数学の基礎体力がついてきます．
- 証明や計算の論理を追うときは **1 行 1 行疑ってかかる**くらいの態度で望みましょう．
- 論理の行間を埋めた後は，**その数学的内容を改めて見直してみましょう**．定義や定理の主張はなにか，仮定はなぜ必要なのか，証明した定理の具体例を上げることができるかなど，時間をかけてじっくりと味わうことが大切です．そうしないと**木を見て森を見ず**という状態に陥ったまま先へ進むことになりがちです．間違ってもよいので，慌てずに．
- 抽象的で難しいと感じる読者が多い集合と位相空間ですが，具体的に手を動かしながら本書の隅々まで熟読され，自分のものとして身につけられますように．健闘を祈ります．

(2022 年 3 月 3 日版)

## §1 の ✍ のマーク

p.2 下から 12 行目

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．このとき，$\sqrt{2}$ を既約分数として，

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \tag{1}$$

と表すことができる．すなわち，$m, n \in \mathbf{N}$ であり，$m$ と $n$ は 1 以外の公約数をもたない．ここで，(1) の両辺を 2 乗して整理すると，

$$2n^2 = m^2 \tag{2}$$

となる．よって，$m$ は 2 の倍数となるので，ある $l \in \mathbf{N}$ が存在し，$m = 2l$ となる．これを (2) に代入して整理すると，$n^2 = 2l^2$ となる．したがって，$n$ は 2 の倍数となるので，ある $k \in \mathbf{N}$ が存在し，$n = 2k$ となる．このとき，$m$ と $n$ は 2 を公約数としてもつので，矛盾である．以上より，$\sqrt{2}$ は無理数である．

## §3 の ✍ のマーク

p.24 下から 6 行目　まず，$A \ominus A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ である．次に，$A \ominus \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$ である．さらに，$A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \ominus A$ である．

## §5 の ✍ のマーク

p.36 上から 8 行目　$y \in [0, +\infty)$ とすると，$x \in \mathbf{R}$ を $x = \sqrt{y}$ により定めることができる．このとき，$f(x) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$ である．よって，$f$ は全射である．

p.36 下から 6 行目　$x_1,\ x_2 \in [0, +\infty)$，$f(x_1) = f(x_2)$ とする．このとき，$x_1^2 = x_2^2$，すなわち，$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$ である．ここで，$x_1,\ x_2 \in [0, +\infty)$ より，$x_1 = x_2$ である．よって，$f$ は単射である．

p.41 脚注 2)　$x_1,\ x_2 \in X$，$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ とする．このとき，$g\bigl(f(x_1)\bigr) = g\bigl(f(x_2)\bigr)$ である．ここで，$g$ は単射なので，$f(x_1) = f(x_2)$ である．さらに，$f$ は単射なので，$x_1 = x_2$ である．よって，$g \circ f$ は単射である．

## §6 の ✍ のマーク

p.45 下から 2 行目

$$
\begin{aligned}
&\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} B_\mu\right) \\
&= \left\{ x \;\middle|\; x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} B_\mu\right) \right\} \\
&= \left\{ x \;\middle|\; x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ かつ } x \in \bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} B_\mu \right\} \\
&= \left\{ x \;\middle|\; \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ が存在し，} x \in A_\lambda\text{，かつ，ある } \mu \in \mathrm{M} \text{ が存在し，} x \in B_\mu \right\} \\
&= \left\{ x \;\middle|\; \text{ある } (\lambda, \mu) \in \Lambda \times \mathrm{M} \text{ が存在し，} x \in A_\lambda \cap B_\mu \right\} \\
&= \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \mathrm{M}} (A_\lambda \cap B_\mu)
\end{aligned}
$$

である．

p.45 下から 1 行目

$$
\begin{aligned}
&\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\cup\left(\bigcap_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right)\\
&=\left\{x \;\middle|\; x\in\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\cup\left(\bigcap_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right)\right\}\\
&=\left\{x \;\middle|\; x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ または } x\in\bigcap_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right\}\\
&=\left\{x \;\middle|\; \text{任意の } \lambda\in\Lambda \text{ に対して，} x\in A_\lambda\text{，または，任意の } \mu\in\mathrm{M} \text{ に対して，} x\in B_\mu\right\}\\
&=\left\{x \;\middle|\; \text{任意の } (\lambda,\mu)\in\Lambda\times\mathrm{M} \text{ に対して，} x\in A_\lambda\cup B_\mu\right\}\\
&=\bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\mathrm{M}} (A_\lambda\cup B_\mu)
\end{aligned}
$$

である．

p.46 下から 1 行目

(1)

$$
\begin{aligned}
\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c &= \left\{x\in X \;\middle|\; x\notin\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right\}\\
&=\left\{x\in X \;\middle|\; \text{任意の } \lambda\in\Lambda \text{ に対して，} x\notin A_\lambda\right\}\\
&=\left\{x\in X \;\middle|\; \text{任意の } \lambda\in\Lambda \text{ に対して，} x\in A_\lambda^c\right\}\\
&=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c
\end{aligned}
$$

である．

(2)

$$
\begin{aligned}
\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c &= \left\{x\in X \;\middle|\; x\notin\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right\}\\
&=\left\{x\in X \;\middle|\; \text{ある } \lambda\in\Lambda \text{ が存在し，} x\notin A_\lambda\right\}\\
&=\left\{x\in X \;\middle|\; \text{ある } \lambda\in\Lambda \text{ が存在し，} x\in A_\lambda^c\right\}\\
&=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c
\end{aligned}
$$

である．

p.47 上から 7 行目

(1)

$$
\begin{aligned}
f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) &= \left\{ y\in Y \;\middle|\; \text{ある } x\in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ が存在し，} y=f(x) \right\} \\
&= \left\{ y\in Y \;\middle|\; \text{ある } \lambda\in\Lambda \text{ が存在し，ある } x\in A_\lambda \text{ が存在し，} y=f(x) \right\} \\
&= \left\{ y\in Y \;\middle|\; \text{ある } \lambda\in\Lambda \text{ が存在し，} y\in f(A_\lambda) \right\} \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)
\end{aligned}
$$

である．

(2)

$$
\begin{aligned}
f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) &= \left\{ y\in Y \;\middle|\; \text{ある } x\in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ が存在し，} y=f(x) \right\} \\
&\subset \left\{ y\in Y \;\middle|\; \text{任意の } \lambda\in\Lambda \text{ に対して，ある } x_\lambda\in A_\lambda \text{ が存在し，} y=f(x_\lambda) \right\} \\
&= \left\{ y\in Y \;\middle|\; \text{任意の } \lambda\in\Lambda \text{ に対して，} y\in f(A_\lambda) \right\} \\
&= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)
\end{aligned}
$$

である．すなわち，$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$ である．

さらに，$f$ が単射なとき，$y\in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$ とする．このとき，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して，$y\in f(A_\lambda)$ である．$y\in f(A_\lambda)$ および像の定義より，ある $x_\lambda\in A_\lambda$ が存在し，$y=f(x_\lambda)$ となる．ここで，$f$ は単射なので，$x_\lambda$ は $\lambda$ に依存しない．よって，$y\in f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ である．したがって，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) \subset f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ である．以上より，$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$ である．

[⇨ スペースの関係上，次のページに続きます]

(3)
$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right) &= \left\{x\in X \;\middle|\; f(x)\in \bigcup_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right\} \\ &= \left\{x\in X \;\middle|\; \text{ある } \mu\in\mathrm{M} \text{ が存在し，} f(x)\in B_\mu\right\} \\ &= \left\{x\in X \;\middle|\; \text{ある } \mu\in\mathrm{M} \text{ が存在し，} x\in f^{-1}(B_\mu)\right\} \\ &= \bigcup_{\mu\in\mathrm{M}} f^{-1}(B_\mu) \end{aligned}$$

である．

(4)
$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcap_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right) &= \left\{x\in X \;\middle|\; f(x)\in \bigcap_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right\} \\ &= \left\{x\in X \;\middle|\; \text{任意の } \mu\in\mathrm{M} \text{ に対して，} f(x)\in B_\mu\right\} \\ &= \left\{x\in X \;\middle|\; \text{任意の } \mu\in\mathrm{M} \text{ に対して，} x\in f^{-1}(B_\mu)\right\} \\ &= \bigcap_{\mu\in\mathrm{M}} f^{-1}(B_\mu) \end{aligned}$$

である．

$\boxed{\text{p.48 上から 5 行目}}$　まず，$x\in\limsup_{n\to\infty} A_n$ となるのは，どのような $k\in\mathbf{N}$ に対しても，$x\in\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ となるとき，すなわち，$k$ 以上の $m\in\mathbf{N}$ が存在し，$x\in A_m$ となるときである．よって，$\limsup_{n\to\infty} A_n$ は無限個の $A_n$ に含まれる元全体の集合である．次に，$x\in\liminf_{n\to\infty} A_n$ となるのは，ある $k\in\mathbf{N}$ に対して，$x\in\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ となるとき，すなわち，$k$ 以上の任意の $m\in\mathbf{N}$ に対して，$x\in A_m$ となるときである．よって，$\liminf_{n\to\infty} A_n$ は有限個の $A_n$ 以外のすべての $A_n$ に含まれる元全体の集合である．

## §7 の ✍ のマーク

$\boxed{\text{p.54 上から 4 行目}}$　まず，$x\in X$ とする．このとき，$x\le x$ なので，$xRx$ である．よって，$R$ は反射律をみたす．次に，$x,\,y\in X$，$xRy$，$yRx$ とする．このとき，$x\le y$，$y\le x$ なので，$x=y$ である．よって，$R$ は反対称律をみたす．さらに，$x,\,y,\,z\in X$，$xRy$，$yRz$ とする．このとき，$x\le y$，$y\le z$ なので，$x\le z$ となり，$xRz$ である．よって，$R$ は推移律をみたす．したがって，$R$ は $X$ 上の順序関係である．さらに，任意の $x,\,y\in X$ に対して，$x\le y$ または $y\le x$ なので，$xRy$ または $yRx$ である．よって，$(X,R)$ は全順序集合である．

$\boxed{\text{p.54 上から 8 行目}}$ $X = \{1, 2\}$ とする．このとき，$\{1\}, \{2\} \in 2^X$ であるが，$\{1\} \subset \{2\}$ でも $\{2\} \subset \{1\}$ でもない．よって，$X$ は全順序集合ではない．

$\boxed{\text{p.54 下から 1 行目}}$ まず，$x_1, x_2 \in X$ を $X$ の最大元とする．このとき，$x_1$ が $X$ の最大元であることより，$x_2 \leq x_1$ である．また，$x_2$ が $X$ の最大元であることより，$x_1 \leq x_2$ である．よって，反対称律より，$x_1 = x_2$ である．したがって，最大元は一意的である．次に，$x_1, x_2 \in X$ を $X$ の最小元とする．このとき，$x_1$ が $X$ の最小元であることより，$x_1 \leq x_2$ である．また，$x_2$ が $X$ の最小元であることより，$x_2 \leq x_1$ である．よって，反対称律より，$x_1 = x_2$ である．したがって，最小元は一意的である．

$\boxed{\text{p.55 上から 10 行目}}$ まず，$x \in X$ とする．このとき，$x = x \cdot 1$ なので，$x$ は $x$ で割り切れる．よって，$xRx$ である．したがって，$R$ は反射律をみたす．次に，$x, y \in X$，$xRy$，$yRx$ とする．このとき，ある $m, n \in \mathbf{N}$ が存在し，$y = xm$，$x = yn$ となる．よって，$x = (xm)n = x(mn)$ となり，$x \neq 0$，$m, n \in \mathbf{N}$ なので，$m = n = 1$ である．すなわち，$x = y$ である．したがって，$R$ は反対称律をみたす．さらに，$x, y, z \in X$，$xRy$，$yRz$ とする．このとき，ある $m, n \in \mathbf{N}$ が存在し，$y = xm$，$z = yn$ となる．よって，$z = (xm)n = x(mn)$ となり，$mn \in \mathbf{N}$ なので，$z$ は $x$ で割り切れる．すなわち，$xRz$ である．したがって，$R$ は推移律をみたす．以上より，$R$ は $X$ 上の順序関係である．

$\boxed{\text{p.58 上から 1 行目}}$ $x, y \in X$, $x \leq y$ とすると, $1_X(x) = x$, $1_X(y) = y$ より, $1_X(x) \leq 1_X(y)$ である．よって，$1_X$ は順序を保つ．さらに，$1_X$ は全単射であり，$1_X^{-1} = 1_X$ なので，$1_X^{-1}$ も順序を保つ．したがって，$1_X$ は順序同型写像である．

$\boxed{\text{p.58 上から 3 行目}}$ $f$ は順序同型写像なので，$f^{-1}$ は順序を保つ．さらに，$f$ は全単射なので，$f^{-1}$ も全単射であり，$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ なので，$\left(f^{-1}\right)^{-1}$ も順序を保つ．よって，$f^{-1}$ は順序同型写像である．

$\boxed{\text{p.58 上から 6 行目}}$ $x, y \in X$，$x \leq y$ とする．このとき，$f$ は順序を保つので，$f(x) \leq' f(y)$ である．さらに，$g$ は順序を保つので，$g\big(f(x)\big) \leq'' g\big(f(y)\big)$，すなわち，$(g \circ f)(x) \leq'' (g \circ f)(y)$ である．よって，$g \circ f$ は順序を保つ．さらに，$f, g$ は全単射なので，$g \circ f$ も全単射である．また，$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であり，$g^{-1}, f^{-1}$ は順序を保つので，上と同様に，$(g \circ f)^{-1}$ も順序を保つ．したがって，$g \circ f$ は順序同型写像である．

$\boxed{\text{p.58 上から 9 行目}}$ $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Z}$ への順序同型写像が存在しないことを背理法により示す．順序同型写像 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ が存在すると仮定する．このとき，$n < f(1)$ となる $n \in \mathbf{Z}$ が存在す

る．ここで，$f$ は順序同型写像なので，$f^{-1}(n) < f^{-1}\big(f(1)\big)$ となる．すなわち，$f^{-1}(n) < 1$ である．これは 1 が $\mathbf{N}$ の最小元であることに矛盾する．よって，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{Z}$ への順序同型写像は存在しない．同様に，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への順序同型写像は存在しない．

p.58 上から 11 行目　$\mathbf{Z}$ から $\mathbf{Q}$ への順序同型写像が存在しないことを背理法により示す．順序同型写像 $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ が存在すると仮定する．このとき，$f(0) < r < f(1)$ となる $r \in \mathbf{Q}$ が存在する．ここで，$f$ は順序同型写像なので，$f^{-1}\big(f(0)\big) < f^{-1}(r) < f^{-1}\big(f(1)\big)$ となる．すなわち，$0 < f^{-1}(r) < 1$ である．このような $f^{-1}(r) \in \mathbf{Z}$ は存在しないので，矛盾である．よって，$\mathbf{Z}$ から $\mathbf{Q}$ への順序同型写像は存在しない．

## §8 の ✍ のマーク

p.65 上から 3 行目　$C\big((k,l)\big), C\big((m,n)\big) \in X/\sim$ に対して，積 $C\big((k,l)\big) \cdot C\big((m,n)\big) \in X/\sim$ を $C\big((k,l)\big) \cdot C\big((m,n)\big) = C\big((km, ln)\big)$ により定める．ここで，$(k', l')$，$(m', n') \in X$，$(k,l) \sim (k', l')$，$(m,n) \sim (m', n')$ とする．このとき，$\sim$ の定義より，$kl' = lk'$，$mn' = nm'$ である．よって，$(km)(l'n') = (kl')(mn') = (lk')(nm') = (ln)(k'm')$，すなわち，$(km)(l'n') = (ln)(k'm')$ である．したがって，$\sim$ の定義より，$(km, ln) \sim (k'm', l'n')$ である．以上より，(8.13) で定めた積の定義は代表の選び方に依存せず，well-defined である．

## §9 の ✍ のマーク

p.69 上から 3 行目　(1) 恒等写像 $1_X : X \to X$ は全単射である．よって，$X \sim X$ である．

(2) $X \sim Y$ とすると，全単射 $f : X \to Y$ が存在する．このとき，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在し，$f^{-1}$ は全単射である．

(3) $X \sim Y$，$Y \sim Z$ とすると，全単射 $f : X \to Y$ および全単射 $g : Y \to Z$ が存在する．このとき，$g \circ f : X \to Z$ は全単射である．よって，$X \sim Z$ である．

p.70 上から 1 行目　$f$ が全射であること　$m \in \mathbf{Z}$ とする．$m > 0$ のとき，$n \in \mathbf{N}$ を $n = 2m$ により定めることができる．このとき，

$$f(n) = f(2m) = (-1)^{2m} \left[\frac{2m}{2}\right] = [m] = m$$

である．$m \leq 0$ のとき，$n \in \mathbf{N}$ を $n = -2m+1$ により定めることができる．このとき，

$$f(n) = f(-2m+1) = (-1)^{-2m+1}\left[\frac{-2m+1}{2}\right] = -\left[-m+\frac{1}{2}\right] = -(-m) = m$$

である．よって，$f$ は全射である．

$f$ が単射であること　$m,\, n \in \mathbf{N}$，$f(m) = f(n)$ とする．このとき，

$$(-1)^m\left[\frac{m}{2}\right] = (-1)^n\left[\frac{n}{2}\right] \qquad (*)$$

である．よって，ある $k,\, l \in \mathbf{N}$ が存在し，「$m = 2k$，$n = 2l$」または「$m = 2k-1$，$n = 2l-1$」となる．$m = 2k$，$n = 2l$ のとき，$(*)$ より，$[k] = [l]$，すなわち，$k = l$ である．したがって，$m = n$ である．$m = 2k-1$，$n = 2l-1$ のとき，$(*)$ より，$\left[k-\frac{1}{2}\right] = \left[l-\frac{1}{2}\right]$，すなわち，$k-1 = l-1$ より，$k = l$ である．したがって，$m = n$ である．以上より，$f$ は単射である．

p.70 上から 4 行目　まず，任意の偶数は $2m$ $(m \in \mathbf{Z})$ と表されるので，$g$ は全射である．次に，$m,\, n \in \mathbf{Z}$，$g(m) = g(n)$ とすると，$2m = 2n$ となり，$m = n$ である．よって，$g$ は単射である．したがって，$g$ は全単射である．

p.70 上から 8 行目　まず，任意の奇数は $l+1$（$l$ は偶数）と表されるので，$h$ は全射である．次に，$l,\, m \in X$，$h(l) = h(m)$ とすると，$l+1 = m+1$ となり，$l = m$ である．よって，$h$ は単射である．したがって，$h$ は全単射である．

p.70 下から 7 行目　$h$ が全射であること　$(x', y') \in X' \times Y'$ とする．このとき，$x' \in X'$ であり，$f$ は全射なので，ある $x \in X$ が存在し，$x' = f(x)$ となる．また，$y' \in Y'$ であり，$g$ は全射なので，ある $y \in Y$ が存在し，$y' = g(y)$ となる．よって，$h(x, y) = \big(f(x), g(y)\big) = (x', y')$ となる．したがって，$h$ は全射である．

$f$ が単射であること　$(x_1, y_1),\, (x_2, y_2) \in X \times Y$，$h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$ とする．このとき，$\big(f(x_1), g(y_1)\big) = \big(f(x_2), g(y_2)\big)$ である．よって，$f(x_1) = f(x_2)$，$g(y_1) = g(y_2)$ である．ここで，$f$ は単射なので，$x_1 = x_2$ である．また，$g$ は単射なので，$y_1 = y_2$ である．したがって，$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ である．以上より，$h$ は単射である．

p.70 下から 2 行目　$k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$ に対して，$S_k = \sum_{j=0}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$ とおく．

$h$ が全射であること　$l \in \mathbf{N}$ とする．$S_k$ の定義より，ある $k \in \{0,\, 1,\, 2,\, \cdots\}$ が一意的に存在し，$S_k < l \leq S_{k+1}$ となる．この式から $S_k$ を引くと，$S_k - S_k < l - S_k \leq S_{k+1} - S_k$，すなわち，$0 < l - S_k \leq k+1$ である．よって，$n \in \mathbf{N}$ を $n = l - S_k$ により定め，$m \in \mathbf{N}$

を $m = k - n + 2$ により定めることができる．このとき，

$$\begin{aligned} f(m,n) &= \frac{\{(k-n+2)+n-2\}\{(k-n+2)+n-1\}}{2} + n \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + n = S_k + n = l \end{aligned}$$

である．したがって，$f$ は全射である．

$f$ が単射であること　$(m,n),\ (m',n') \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$，$f(m,n) = f(m',n')$ とする．このとき，$f$ および $S_k$ の定義より，

$$S_{m+n-2} < f(m,n) \leq S_{m+n-1}, \quad S_{m'+n'-2} < f(m',n') \leq S_{m'+n'-1}$$

である．よって，$f(m,n) = f(m',n')$ より，$S_{m+n-2} < S_{m'+n'-1}$ となり，$m+n-2 < m'+n'-1$，すなわち，$m+n \leq m'+n'$ である．同様に，$m'+n' \leq m+n$ となるので，$m+n = m'+n'$ である．したがって，$f(m,n) = f(m',n')$ より，$n = n'$ となり，さらに，$m = m'$ となる．すなわち，$(m,n) = (m',n')$ である．以上より，$f$ は単射である．

p.71 上から 4 行目　$A$ は $A = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}$ $(a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots)$ と表すことができる．このとき，$n \in \mathbf{N}$ とすると，$f$ の定義より，$f(a_n) = n$ である．よって，$f$ は全射である．また，$a,\ b \in A$，$f(a) = f(b)$ とすると，ある $m,\ n \in \mathbf{N}$ が一意的に存在し，$a = a_m$，$b = a_n$ となるので，$f$ の定義より，$m = n$，すなわち，$a = b$ である．よって，$f$ は単射である．したがって，$f$ は全単射である．

p.71 上から 5 行目　$X$ を可算集合，$A$ を $X$ の無限部分集合とする．まず，$X$ は可算なので，全単射 $f : X \to \mathbf{N}$ が存在する．ここで，$f$ の定義域を $A$ に制限し，$f$ の値域を $f(A)$ に制限して得られる $A$ から $f(A)$ への写像は全単射である．さらに，$A$ は無限集合なので，$f(A)$ は $\mathbf{N}$ の無限部分集合である．よって，$f(A)$ は可算である．したがって，$A$ は可算である．

p.73 下から 5 行目　$\mathbf{R} \sim (0,1)$ および $(0,1) \sim (0,1]$ は示しているので，定理 9.1 (2), (3) より，次の (1)〜(9) を示せばよい．(1) $(0,1] \sim [0,1)$，(2) $[0,1) \sim [0,1]$，(3) $(0,1) \sim (0,+\infty)$，(4) $[0,1) \sim [0,+\infty)$，(5) 有界開区間と有界閉区間は濃度が等しい，(6) 右半開区間と右半開区間は濃度が等しい，(7) 2 個以上の元を含む有界閉区間と 2 個以上の元を含む有界閉区間は濃度が等しい，(8) 無限開区間と無限開区間は濃度が等しい，(9) 無限閉区間と無限閉区間は濃度が等しい．

(1) 写像 $f:(0,1]\to[0,1)$ を $f(x)=\begin{cases} x & (x\in(0,1)), \\ 0 & (x=1) \end{cases}$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$(0,1]\sim[0,1)$ である．

(2) 写像 $f:[0,1)\to[0,1]$ を $f(x)=\begin{cases} 2x & \left(\text{ある } n\in\mathbf{N} \text{ が存在し } x=\frac{1}{2^n}\right), \\ x & \left(x=\frac{1}{2^n} \text{ となる } n\in\mathbf{N} \text{ が存在しない}\right) \end{cases}$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$[0,1)\sim[0,1]$ である．

(3) 写像 $f:(0,1)\to(0,+\infty)$ を $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ $(x\in(0,1))$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$(0,1)\sim(0,+\infty)$ である．

(4) 写像 $f:[0,1)\to[0,+\infty)$ を $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ $(x\in[0,1))$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$[0,1)\sim(0,+\infty)$ である．

(5) $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}$，$a<b$，$c<d$ とし，写像 $f:(a,b)\to(c,d)$ を $f(x)=\dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ $(x\in(a,b))$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$(a,b)\sim(c,d)$ である．すなわち，有界開区間と有界開区間は濃度が等しい，

(6) $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}$，$a<b$，$c<d$ とし，写像 $f:[a,b)\to[c,d)$ を $f(x)=\dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ $(x\in[a,b))$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$[a,b)\sim[c,d)$ である．すなわち，右半開区間と右半開区間は濃度が等しい，

(7) $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}$，$a<b$，$c<d$ とし，写像 $f:[a,b]\to[c,d]$ を $f(x)=\dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ $(x\in[a,b])$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$[a,b]\sim[c,d]$ である．すなわち，2 個以上の元を含む有界閉区間と 2 個以上の元を含む有界閉区間は濃度が等しい，

(8) $a,\ b\in\mathbf{R}$ とする．まず，写像 $f:(a,+\infty)\to(b,+\infty)$ を $f(x)=x-a+b$ $(x\in(a,+\infty))$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$(a,+\infty)\sim(b,+\infty)$ である．次に，写像 $f:(a,+\infty)\to(-\infty,b)$ を $f(x)=-x+a+b$ $(x\in(a,+\infty))$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$(a,+\infty)\sim(-\infty,b)$ である．よって，無限開区間と無限開区間は濃度が等しい，

(9) $a,\ b\in\mathbf{R}$ とする．まず，写像 $f:[a,+\infty)\to[b,+\infty)$ を $f(x)=x-a+b$ $(x\in[a,+\infty))$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$[a,+\infty)\sim[b,+\infty)$ である．次に，写像 $f:[a,+\infty)\to(-\infty,b]$ を $f(x)=-x+a+b$ $(x\in[a,+\infty))$ により定める．このとき，$f$ は全単射となるので，$[a,+\infty)\sim(-\infty,b]$ である．よって，無限閉区間と無限閉区間は濃度が等しい，

[⇨ スペースの関係上，次のページに続きます]

## §10 の ✍ のマーク

p.77 下から 9 行目　$h$ が全射であること　$y \in Y$ とする．(10.7) の第 2 式および $B_\infty$，$B_X$，$B_Y$ が互いに素であることより，$y \in B_\infty$，$y \in B_X$，$y \in B_Y$ のいずれか 1 つのみがなりたつ．$y \in B_\infty$ のとき，(10.8) の第 1 式より，ある $x \in A_\infty$ が存在し，$y = f(x)$ となる．このとき，$x \in X$ であり，(10.9) より，$h(x) = f(x) = y$ となる．$y \in B_X$ のとき，(10.8) の第 2 式より，ある $x \in A_X$ が存在し，$y = f(x)$ となる．このとき，$x \in X$ であり，(10.9) より，$h(x) = f(x) = y$ となる．$y \in B_Y$ のとき，$g$ が $B_Y$ から $A_Y$ への全単射を定めることより，$g^{-1}(A_Y) = B_Y$ となるので，ある $x \in A_Y$ が存在し，$y = g^{-1}(x)$ となる．このとき，$x \in X$ であり，(10.9) より，$h(x) = g^{-1}(x) = y$ となる．したがって，$h$ は全射である．

$h$ が単射であること　$x_1, x_2 \in X$，$h(x_1) = h(x_2)$ とする．(10.7) の第 1 式および $A_\infty$，$A_X$，$A_Y$ が互いに素であること，(10.8) の第 1 式，第 2 式および $g^{-1}(A_Y) = B_Y$，さらに，$B_\infty$，$B_X$，$B_Y$ が互いに素であることと (10.9) より，$x_1, x_2 \in A_\infty$，$x_1, x_2 \in A_X$，$x_1, x_2 \in A_Y$ のいずれか 1 つのみがなりたつ．$x_1, x_2 \in A_\infty$ のとき，$h(x_1) = h(x_2)$ および (10.9) より，$f(x_1) = f(x_2)$ となる．ここで，$f$ は $A_\infty$ から $B_\infty$ への全単射を定めるので，とくに，$f$ は $A_\infty$ から $B_\infty$ への単射を定める．よって，$x_1 = x_2$ である．$x_1, x_2 \in A_X$ のとき，$h(x_1) = h(x_2)$ および (10.9) より，$f(x_1) = f(x_2)$ となる．ここで，$f$ は $A_X$ から $B_X$ への全単射を定めるので，とくに，$f$ は $A_X$ から $B_X$ への単射を定める．よって，$x_1 = x_2$ である．$x_1, x_2 \in A_Y$ のとき，$h(x_1) = h(x_2)$ および (10.9) より，$g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2)$ となる．ここで，$g$ は $B_Y$ から $A_Y$ への全単射を定めるので，とくに，$g^{-1}$ は $A_Y$ から $B_Y$ への単射を定める．よって，$x_1 = x_2$ である．したがって，$h$ は単射である．

## §12 の ✍ のマーク

p.94 上から 1 行目　$y_1, y_2 \in Y$，$s(y_1) = s(y_2)$ とする．このとき，$f \circ s = 1_Y$ より，$y_1 = 1_Y(y_1) = (f \circ s)(y_1) = f\big(s(y_1)\big) = f\big(s(y_2)\big) = (f \circ s)(y_2) = 1_Y(y_2) = y_2$ である．すなわち，$y_1 = y_2$ である．よって，$s$ は単射である．

p.97 下から 5 行目　$a \notin H$ のとき，$H$ の定義式 (12.9) より，ある $x_1, x_2, \cdots, x_n \in W\langle a \rangle$ および $r_1, r_2, \cdots, r_n \in \mathbf{Q}$ が存在し，

$$a = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_n x_n$$

となる．さらに, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \in W\langle a\rangle$ なので, 超限帰納法の仮定より, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，ある $x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ \cdots,\ x_{m_i}^{(i)} \in H$ および $r_1^{(i)},\ r_2^{(i)},\ \cdots,\ r_{m_i}^{(i)} \in \mathbf{Q}$ が存在し，

$$x_i = r_1^{(i)}x_1^{(i)} + r_2^{(i)}x_2^{(i)} + \cdots + r_{m_i}^{(i)}x_{m_i}^{(i)}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} a &= r_1\left(r_1^{(1)}x_1^{(1)} + \cdots + r_{m_1}^{(1)}x_{m_1}^{(1)}\right) + \cdots + r_n\left(r_1^{(n)}x_1^{(n)} + \cdots + r_{m_n}^{(n)}x_{m_n}^{(n)}\right) \\ &= \left(r_1r_1^{(1)}\right)x_1^{(1)} + \cdots + \left(r_1r_{m_1}^{(1)}\right)x_{m_1}^{(1)} + \cdots + \left(r_nr_1^{(n)}\right)x_1^{(n)} + \cdots + \left(r_nr_{m_n}^{(n)}\right)x_{m_n}^{(n)} \end{aligned}$$

となり，$P(a)$ は真となる．

p.97 脚注 10)　$x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ が互いに異なる $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_l \in H$ および $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_l \in \mathbf{Q}$ に対して，

$$x = r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_lx_l$$

と表され，また，互いに異なる $x_1',\ x_2',\ \cdots,\ x_m' \in H$ および $r_1',\ r_2',\ \cdots,\ r_m' \in \mathbf{Q}$ に対して，

$$x = r_1'x_1' + r_2'x_2' + \cdots + r_m'x_m'$$

と表されるとする．$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_l,\ x_1',\ x_2',\ \cdots,\ x_m'$ が互いに異なるとき，

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_lx_l - r_1'x_1' - r_2'x_2' - \cdots - r_m'x_m' = 0$$

となるので, (1) より, $r_1 = r_2 = \cdots = r_l = r_1' = r_2' = \cdots = r_m' = 0$ となる．よって, $x = 0$ となり，矛盾である．したがって，ある $k \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ \min\{l, m\}\}$ に対して，$x_1 = x_1'$，$\cdots$，$x_k = x_k'$，かつ，$x_{k+1},\ x_{k+2},\ \cdots,\ x_l,\ x_{k+1}',\ x_{k+2}',\ \cdots,\ x_m'$ は互いに異なるとしてよい．このとき，

$$\begin{aligned} (r_1 - r_1')x_1 + \cdots + (r_k - r_k')x_k + r_{k+1}x_{k+1} + \\ \cdots + r_lx_l - r_{k+1}'x_{k+1}' - \cdots - r_m'x_m' = 0 \end{aligned}$$

となるので, (1) より, $r_1 = r_1'$，$\cdots$，$r_k = r_k'$，$r_{k+1} = \cdots = r_l = r_{k+1}' = \cdots = r_m' = 0$ となる．以上より，一意性がなりたつ．

[⇨ スペースの関係上，次のページに続きます]

## §13 の ✍ のマーク

p.104 下から 1 行目　(1) (13.11) より, $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geq 0$ である．さらに, $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ となるのは $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = 0$ より，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のとき，すなわち，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ のときに限る．よって，(1) がなりたつ．
(2) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \big\|(-1)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\big\| = |-1|\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ である．よって，(2) がなりたつ．
(3) 定理 13.2 (3) より，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\| = \big\|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\big\| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\| = d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ である．よって，(3) がなりたつ．

## §15 の ✍ のマーク

p.115 脚注 3)　まず，$\mathbf{R} \setminus [a,+\infty) = (-\infty,a)$ である．例題 14.1 より，$(-\infty,a)$ は $\mathbf{R}$ の開集合なので，閉集合の定義（定義 15.1）より，$[a,+\infty)$ は $\mathbf{R}$ の閉集合である．

p.119 脚注 5)　まず, $a \in [a,b)$ であり, $a$ を中心とするどのような開球体 $B(a;\varepsilon)$ に対しても，$B(a;\varepsilon) \not\subset [a,b)$ である．よって, $[a,b)$ は開集合の定義 (定義 14.1) をみたさないので, $\mathbf{R}$ の開集合ではない．次に，$\mathbf{R} \setminus [a,b) = (-\infty,a) \cup [b,+\infty)$ である．ここで，$b \in \mathbf{R} \setminus [a,b)$ であり，$b$ を中心とするどのような開球体 $B(b;\varepsilon)$ に対しても，$B(b;\varepsilon) \not\subset (-\infty,a) \cup [b,+\infty)$ である．よって，$\mathbf{R} \setminus [a,b)$ は開集合の定義（定義 14.1）をみたさないので，$\mathbf{R}$ の開集合ではない．したがって，$[a,b)$ は閉集合の定義（定義 15.1）をみたさないので，$\mathbf{R}$ の閉集合ではない．

## §16 の ✍ のマーク

p.125 上から 4 行目　まず，$(x,y)$, $(x',y') \in X \times Y$ とすると，$d'$ の定義式 (16.6) および $d_X$, $d_Y$ の正値性（定義 16.1(1)）より，$d'\big((x,y),(x',y')\big) \geq 0$ である．さらに，$d'\big((x,y),(x',y')\big) = 0$ となるのは $d_X(x,x') = d_Y(y,y') = 0$ となるとき，すなわち，$x = x'$，$y = y'$ より，$(x,y) = (x',y')$ のときに限る．よって，$d'$ は正値性（定義 16.1(1)）をみたす．次に，$(x,y)$, $(x',y') \in X \times Y$ とすると，$d'$ の定義式 (16.6) および $d_X$, $d_Y$ の対称性 (定義 16.1(2)) より，$d'\big((x,y),(x',y')\big) = d_X(x,x') + d_Y(y,y') = d_X(x',x) + d_Y(y',y) = d'\big((x',y'),(x,y)\big)$ である．よって，$d'$ は対称性（定義 16.1(2)）をみたす．さらに，$(x,y)$, $(x',y')$, $(x'',y'') \in X \times Y$ とすると，$d'$ の定義式 (16.6) および $d_X$, $d_Y$

に対する三角不等式（定義 16.1(3)）より，

$$\begin{aligned} d'\left((x,y),(x'',y'')\right) &= d_X(x,x'') + d_Y(y,y'') \\ &\leq \left(d_X(x,x') + d_X(x',x'')\right) + \left(d_Y(y,y') + d_Y(y',y'')\right) \\ &= \left(d_X(x,x') + d_Y(y,y')\right) + \left(d_X(x',x'') + d_Y(y',y'')\right) \\ &= d'\left((x,y),(x',y')\right) + d'\left((x',y'),(x'',y'')\right) \end{aligned}$$

である．よって，$d'$ は三角不等式（定義 16.1(3)）をみたす．したがって，$d'$ は $X \times Y$ の距離である．

p.126 下から 7 行目　$(X,d)$ を距離空間，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a \in X$ に収束する $X$ の点列とし，$\varepsilon > 0$ とする．点列の収束の定義 (定義 16.2(2)) より，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し，$n \geq N$ $(n \in \mathbf{N})$ ならば，$d(a_n, a) < \varepsilon$ となる．よって，$m,\ n \geq N$ $(m, n \in \mathbf{N})$ のとき，

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) = d(a_m, a) + d(a_n, a) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となる．また，$m \geq N$，$n < N$（$m,\ n \in \mathbf{N}$）のとき，

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) < \varepsilon + d(a_n, a)$$

となる．さらに，$m < N$，$n \geq N$（$m,\ n \in \mathbf{N}$）のとき，

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) < d(a_m, a) + \varepsilon$$

となる．よって，$M > 0$ を

$$M = \max\left\{2\varepsilon,\ d(a_1, a),\ \cdots,\ d(a_{N-1}, a),\ d(a_i, a_j)\ \ (i,\ j = 1,\ \cdots,\ N-1,\ i \neq j)\right\}$$

により定めると，任意の $m,\ n \in \mathbf{N}$ に対して，$d(a_m, a_n) \leq M$ である．すなわち，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である．したがって，距離空間の収束する点列は有界である．

p.126 脚注 2)　$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbf{R}^n$ の点列とする．まず，$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が問 13.2 の意味で有界であるとする．このとき，ある $M > 0$ が存在し，任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して，$\|\boldsymbol{a}_k\| \leq M$ となる．よって，$k,\ l \in \mathbf{N}$ とすると，

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l) &\leq d(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{0}) + d(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_l) \\ &= \|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{0}\| + \|\boldsymbol{0} - \boldsymbol{a}_m\| \\ &= \|\boldsymbol{a}_k\| + \|\boldsymbol{a}_m\| \leq M + M = 2M \end{aligned}$$

となる．すなわち，$d(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l) \leq 2M$ である．したがって，$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は定義 16.3 の意味で有界である．次に，$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が定義 16.3 の意味で有界であるとする．このとき，ある $M > 0$ が存在し，任意の $k,\, l \in \mathbf{N}$ に対して，$d(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l) \leq M$ となる．よって，$k \in \mathbf{N}$ とすると，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}_k\| = d(\boldsymbol{a}_k, \mathbf{0}) &\leq d(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) + d(\boldsymbol{a}_1, \mathbf{0}) \\ &\leq M + d(\boldsymbol{a}_1, \mathbf{0})\end{aligned}$$

となる．すなわち，$\|\boldsymbol{a}_k\| \leq M + d(\boldsymbol{a}_1, \mathbf{0})$ である．したがって，$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は問 13.2 の意味で有界である．以上より，問 13.2 と定義 16.3 の 2 通りの定義は同値である．

**p.127 脚注 3)**　まず，$f,\, g \in B(X)$ とすると，$d$ の定義より，$d(f, g) = 0$ となるのは

$$\sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\} = 0$$

より，任意の $x \in X$ に対して，$f(x) - g(x) = 0$ となるとき，すなわち，$f = g$ のときに限る．よって，(1) とあわせると，$d$ は正値性（定義 16.1(1)）をみたす．次に，$f,\, g \in B(X)$ とすると，$d$ の定義より，

$$\begin{aligned}d(f, g) &= \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\} \\ &= \sup\{|g(x) - f(x)| \mid x \in X\} = d(g, f)\end{aligned}$$

である．よって，$d$ は対称性（定義 16.1(2)）をみたす．さらに，$f,\, g,\, h \in B(X)$ とすると，絶対値に対する三角不等式より，任意の $x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}\big|f(x) - h(x)\big| &= \big|\big(f(x) - g(x)\big) + \big(g(x) - h(x)\big)\big| \\ &\leq \big|f(x) - g(x)\big| + \big|g(x) - h(x)\big|\end{aligned}$$

である．よって，$d$ の定義より，

$$\begin{aligned}d(f, g) &= \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\} \\ &\leq \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\} + \sup\{|g(x) - h(x)| \mid x \in X\} \\ &= d(f, g) + d(g, f)\end{aligned}$$

である．したがって，$d$ は三角不等式（定義 16.1(3)）をみたす．以上より，$d$ は $B(X)$ の距離である．

## §17 の ✍ のマーク

**p.135 上から 8 行目**　$O$ を $X$ の $d'$ に関する開集合とする．$O = \emptyset$ のとき，定理 17.6(1)

より，$O$ は $X$ の $d$ に関する開集合である．$O \neq \emptyset$ のとき，$a \in O$ とする．このとき，開集合の定義（定義 17.1(2)）より，ある $\varepsilon > 0$ が存在し，$B'(a; c'\varepsilon) \subset O$ となる．ここで，$x \in B(a; \varepsilon)$ とすると，(17.2) より，

$$d'(x, a) \leq c' d(x, a) < c'\varepsilon$$

である．よって，$B(a; \varepsilon) \subset B'(a; c'\varepsilon)$ となるので，$B(a; \varepsilon) \subset O$ である．したがって，開集合の定義（定義 17.1(2)）より，$O$ は $X$ の $d$ に関する開集合である．

p.135 下から 7 行目　$d'$ が $\mathbf{R}^n$ の距離となること　まず, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ とすると，$d'$ の定義より，

$$d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$$

である．さらに, $d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となるのは $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$ より, 任意の $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して，$x_i - y_i = 0$ となるとき，すなわち，$x_i = y_i$ より，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ のときに限る．よって，$d'$ は正値性（定義 16.1(1)）をみたす．

次に，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ とすると，$d'$ の定義より，

$$d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d'(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

である．よって，$d'$ は対称性（定義 16.1(2)）をみたす．

さらに，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{R}^n$ とすると，$d'$ の定義および絶対値に対する三角不等式より，

$$\begin{aligned} d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| &\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \\ &= d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d'(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

である．よって，$d'$ は三角不等式（定義 16.1(3)）をみたす．したがって，$d'$ は $\mathbf{R}^n$ の距離である．

$d''$ が距離となること　まず，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ とすると，$d'$ の定義より，

$$d''(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$$

である．さらに，$d''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ となるのは $\max\{|x_i-y_i|\,|\,i=1,\,2,\,\cdots,\,n\}=0$ より，任意の $i\in\{1,\,2,\,\cdots,\,n\}$ に対して，$x_i-y_i=0$ となるとき，すなわち，$x_i=y_i$ より，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ のときに限る．よって，$d'$ は正値性（定義 16.1(1)）をみたす．

次に，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$ とすると，$d''$ の定義より，

$$\begin{aligned}d''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=\max\{|x_i-y_i|\,|\,i=1,\,2,\,\cdots,\,n\}\\&=\max\{|y_i-x_i|\,|\,i=1,\,2,\,\cdots,\,n\}\\&=d''(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

である．よって，$d''$ は対称性（定義 16.1(2)）をみたす．

さらに，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{R}^n$ とすると，$d''$ の定義および絶対値に対する三角不等式より，

$$\begin{aligned}d''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})&=\max\{|x_i-z_i|\,|\,i=1,\,2,\,\cdots,\,n\}\\&\le\max\{|x_i-y_i|+|y_i-z_i|\,|\,i=1,\,2,\,\cdots,\,n\}\\&\le\max\{|x_i-y_i|\,|\,i=1,\,2,\,\cdots,\,n\}+\max\{|y_i-z_i|\,|\,i=1,\,2,\,\cdots,\,n\}\\&=d''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d''(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\end{aligned}$$

である．よって，$d''$ は三角不等式（定義 16.1(3)）をみたす．したがって，$d''$ は $\mathbf{R}^n$ の距離である．

p.135 下から 3 行目　$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$ とする．

$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\le d'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$　$d$, $d'$ の定義より，

$$\begin{aligned}\big(d'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big)^2-\big(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big)^2&=\big(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|\big)^2\\&\qquad-\Big\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\Big\}\\&=\sum_{i\ne j}|x_i-y_i||x_j-y_j|\ge 0\end{aligned}$$

である．ただし，$\sum\limits_{i\ne j}$ は $i\ne j$ となるすべての $i,\,j=1,\,2,\,\cdots,\,n$ に関する和を表す．よって，

$$\big(d'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big)^2\ge\big(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big)^2$$

である．さらに，$d$, $d'$ の正値性（定義 16.1(1)）をあわせると，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\le d'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ である．

$d'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\le nd''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$　任意の $j=\{1,\,2,\,\cdots,\,n\}$ に対して，

$$|x_j-y_j|\le\max\{|x_i-y_i|\,|\,i=1,\,2,\,\cdots,\,n\}$$

である．よって，$d'$, $d''$ の定義より，$d'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq n \times d''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ である．

$nd''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq nd(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$　まず，ある $j \in \{1,\, 2,\, \cdots,\, n\}$ が存在し，

$$|x_j - y_j| = \max\{|x_i - y_i| \,|\, i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n\}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} d''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \max\{|x_i - y_i| \,|\, i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n\} \\ &= |x_j - y_j| \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

である．よって，$nd''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq nd(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ である．

## §18 の ✍ のマーク

p.144 上から 4 行目　(1) ⇒ (2)　まず，$1_X$ は全単射である．次に，$O$ を $X$ の $d'$ に関する開集合とする．このとき，${1_X}^{-1}(O) = O$ である．また，(1) より，$O$ は $X$ の $d$ に関する開集合である．よって，定理 18.3 の (2) ⇒ (1) より，$1_X$ は $(X, d)$ から $(X, d')$ への連続写像である．さらに，$O$ を $X$ の $d$ に関する開集合とする．このとき，$({1_X}^{-1})^{-1}(O) = 1_X(O) = O$ である．また，(1) より，$O$ は $X$ の $d'$ に関する開集合である．よって，定理 18.3 の (2) ⇒ (1) より，${1_X}^{-1}$ は $(X, d')$ から $(X, d)$ への連続写像である．したがって，同相写像の定義（定義 18.2）より，(2) がなりたつ．

(2) ⇒ (1)　まず，$O$ を $X$ の $d'$ に関する開集合とする．このとき，$O = {1_X}^{-1}(O)$ である．さらに，(2) および同相写像の定義（定義 18.2）より，$1_X$ は $(X, d)$ から $(X, d')$ への連続写像なので，定理 18.3 の (1) ⇒ (2) より，$O$ は $X$ の $d$ に関する開集合である．次に，$O$ を $X$ の $d$ に関する開集合とする．このとき，$O = ({1_X}^{-1})^{-1}(O)$ である．さらに，(2) および同相写像の定義（定義 18.2）より，${1_X}^{-1}$ は $(X, d')$ から $(X, d)$ への連続写像なので，定理 18.3 の (1) ⇒ (2) より，$O$ は $X$ の $d'$ に関する開集合である．よって，$X$ の $d$ に関する開集合系と $d'$ に関する開集合系は一致し，(1) がなりたつ．

## §19 の ✍ のマーク

p.150 下から 8 行目　(19.4) より，$X \setminus \partial A = A^i \sqcup A^e$ である．ここで，$A^i$, $A^e$ は $X$ の開集合なので，$A^i \sqcup A^e$，すなわち，$X \setminus \partial A$ は $X$ の開集合である．よって，$\partial A$ は $X$ の閉集合である．

## §21 の ✍ のマーク

p.164 下から 3 行目　$a \in X$ とし，次の 2 つの条件を考える．(1) $f(a) \in O$ となる $Y$ の任意の開集合 $O$ に対して，$a \in O' \subset f^{-1}(O)$ となる $X$ の開集合 $O'$ が存在する．(2) $f$ による $f(a) \in Y$ の任意の近傍の逆像が $a$ の近傍となる．

(1) ⇒ (2)　$U$ を $f(a)$ の近傍とする．このとき，$Y$ のある開集合 $O$ が存在し，$f(a) \in O \subset U$ となる．ここで，(1) より，$X$ のある開集合 $O'$ が存在し，$a \in O' \subset f^{-1}(O)$ となる．さらに，$O \subset U$ より，$f^{-1}(O) \subset f^{-1}(U)$ なので，$a \in O' \subset f^{-1}(U)$ となる．よって，$f^{-1}(U)$ は $a$ の近傍である．したがって，(2) がなりたつ．

(2) ⇒ (1)　$O$ を $f(a) \in O$ となる $Y$ の開集合とする．このとき，$O$ は $f(a)$ の開近傍である．よって，(2) より，$f^{-1}(O)$ は $a$ の近傍である．したがって，$X$ のある開集合 $O'$ が存在し，$a \in O' \subset f^{-1}(O)$ となる．すなわち，(1) が成り立つ．

p.170 脚注 1)　$cf \in C(X)$　$a \in X$ とし，$U$ を $(cf)(a)$ の近傍とする．このとき，ある $\varepsilon > 0$ が存在し，$B((cf)(a); \varepsilon) \subset U$ となる．さらに，

$$O = f^{-1}\left(B\left(f(a); \frac{\varepsilon}{1+|c|}\right)\right)$$

とおく．$f \in C(X)$ より，$O$ は $a$ を含む $X$ の開集合である．ここで，$x \in O$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\big|(cf)(x) - (cf)(a))\big| &= \big|cf(x) - cf(a)\big| \\ &= |c|\big|f(x) - f(a)\big| \\ &\leq |c|\frac{\varepsilon}{1+|c|} < \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち，$x \in (cf)^{-1}\left(B((cf)(a); \varepsilon)\right)$ である．よって，$O \subset (cf)^{-1}\big(B((cf)(a); \varepsilon)\big) \subset (cf)^{-1}(U)$, すなわち, $O \subset (cf)^{-1}(U)$ である．$O$ は $a$ を含む $X$ の開集合なので, $(cf)^{-1}(U)$ は $a$ の近傍である．したがって，$cf$ は $a$ で連続である．$a$ は任意なので，$cf$ は連続，すなわち，$cf \in C(X)$ である．

$fg \in C(X)$　$a \in X$ とし，$U$ を $(fg)(a)$ の近傍とする．このとき，ある $\varepsilon > 0$ が存在し，$B\big((fg)(a); \varepsilon\big) \subset U$ となる．さらに，

$$O_1 = f^{-1}\left(B\left(f(a); \min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{1+|f(a)|+|g(a)|}\right\}\right)\right)$$

とおく．$f \in C(X)$ より，$O_1$ は $a$ を含む $X$ の開集合である．同様に，

$$O_2 = g^{-1}\left(B\left(g(a); \min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{1+|f(a)|+|g(a)|}\right\}\right)\right)$$

とおくと，$O_2$ は $a$ を含む $X$ の開集合である．ここで，$x \in O_1 \cap O_2$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
&\big|(fg)(x) - (fg)(a)\big| = \big|f(x)g(x) - f(a)g(a)\big| \\
&\quad = \big|\big(f(x) - f(a)\big)g(x) + f(a)\big(g(x) - g(a)\big)\big| \\
&\quad = \big|\big(f(x) - f(a)\big)\big\{\big(g(x) - g(a)\big) + g(a)\big\} + f(a)\big(g(x) - g(a)\big)\big| \\
&\quad \le \big|f(x) - f(a)\big|\big|g(x) - g(a)\big| + \big|f(x) - f(a)\big|\big|g(a)\big| + \big|f(a)\big|\big|g(x) - g(a)\big| \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{1+|f(a)|+|g(a)|} \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{1+|f(a)|+|g(a)|}\big|g(a)\big| + \big|f(a)\big|\frac{\varepsilon}{1+|f(a)|+|g(a)|} \\
&\quad = \varepsilon,
\end{aligned}$$

すなわち，$x \in (fg)^{-1}\big(B\big((fg)(a); \varepsilon\big)\big)$ である．よって，$O_1 \cap O_2 \subset (fg)^{-1}\big(B\big((cf)(a); \varepsilon\big)\big) \subset (fg)^{-1}(U)$，すなわち，$O_1 \cap O_2 \subset (fg)^{-1}(U)$ である．$O_1 \cap O_2$ は $a$ を含む $X$ の開集合なので，$(fg)^{-1}(U)$ は $a$ の近傍である．したがって，$fg$ は $a$ で連続である．$a$ は任意なので，$fg$ は連続，すなわち，$fg \in C(X)$ である．

## §22 の ✍ のマーク

**p.174 脚注 3)**　$O$ を $f(a) \in O$ となる $Y$ の開集合とする．$f$ は $a$ で連続なので，$X$ のある開集合 $O'$ が存在し，$a \in O' \subset f^{-1}(O)$ となる．ここで，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a$ に収束するので，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し，$n \ge N$ $(n \in \mathbf{N})$ ならば，$a_n \in O'$ となる．このとき，$O' \subset f^{-1}(O)$ より，$f(a_n) \in f(O') \subset f\left(f^{-1}(O)\right) \subset O$，すなわち，$f(a_n) \in O$ である．よって，$\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束する．

**p.176 上から 3 行目**　定義 20.1 (1)〜(3) の位相の条件をみたすことを示せばよい．

**位相の条件 (1)**　まず，明らかに $\emptyset \in \mathfrak{O}$ である．また，$X \setminus X = \emptyset$ であり，$\emptyset$ は有限集合なので，$X \in \mathfrak{O}$ である．よって，$\mathfrak{O}$ は定義 20.1 (1) の位相の条件をみたす．

**位相の条件 (2)**　$O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ とする．$O_1 = \emptyset$ または $O_2 = \emptyset$ のとき，$O_1 \cap O_2 = \emptyset$ である．よって，$O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$ である．$O_1 \ne \emptyset$ かつ $O_2 \ne \emptyset$ のとき，$X \setminus O_1$，$X \setminus O_2$ は有限集合である．ここで，$X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2)$ なので，$X \setminus (O_1 \cap O_2)$ は有限集合である．よって，$O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$ である．したがって，$\mathfrak{O}$ は定義 20.1 (2) の位相

の条件をみたす．

位相の条件 (3)　$(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族とする．任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して，$O_\lambda=\emptyset$ のとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda=\emptyset$ である．よって，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\in\mathfrak{O}$ である．ある $\lambda_0\in\Lambda$ に対して，$O_{\lambda_0}\neq\emptyset$ のとき，$X\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X\setminus O_\lambda)\subset X\setminus O_{\lambda_0}$ である．ここで，$X\setminus O_{\lambda_0}$ は有限集合なので，$X\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\right)$ は有限集合である．よって，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\in\mathfrak{O}$ である．したがって，$\mathfrak{O}$ は定義 20.1 (3) の位相の条件をみたす．

## § 23 の ✍ のマーク

p.181 上から 8 行目　$\mathfrak{O}'=\bigcap\{\mathfrak{O}\mid\mathfrak{M}\subset\mathfrak{O},\ \mathfrak{O}\text{ は }X\text{ の位相}\}$ とおくと，$\mathfrak{O}'$ は $\mathfrak{M}$ を含む $X$ の任意の位相に含まれる．よって，$\mathfrak{O}'$ が $X$ の位相となることを示せばよい．すなわち，$\mathfrak{O}'$ が定義 20.1 (1)〜(3) の位相の条件をみたすことを示せばよい．

位相の条件 (1)　$\mathfrak{M}$ を含む $X$ の任意の位相は $\emptyset$, $X$ を含む．よって，$\emptyset$, $X\in\mathfrak{O}'$ である．すなわち，$\mathfrak{O}'$ は定義 20.1 (1) の位相の条件をみたす．

位相の条件 (2)　$O_1$, $O_2\in\mathfrak{O}'$ とする．このとき，$\mathfrak{M}\subset\mathfrak{O}$ となる $X$ の任意の位相 $\mathfrak{O}$ に対して，$O_1$, $O_2\in\mathfrak{O}$ である．よって，位相の条件 (2) より，$O_1\cap O_2\in\mathfrak{O}$ である．したがって，$O_1\cap O_2\in\mathfrak{O}'$ である．すなわち，$\mathfrak{O}'$ は定義 20.1 (2) の位相の条件をみたす．

位相の条件 (3)　$(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathfrak{O}'$ の元からなる集合族とする．このとき，$\mathfrak{M}\subset\mathfrak{O}$ となる $X$ の任意の位相 $\mathfrak{O}$ に対して，$(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族である．よって，位相の条件 (3) より，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\in\mathfrak{O}$ である．したがって，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\in\mathfrak{O}'$ である．すなわち，$\mathfrak{O}'$ は定義 20.1 (3) の位相の条件をみたす．

p.183 上から 8 行目　$O$ を $X$ の空でない開集合とする．このとき，任意の $a\in O$ に対して，ある $\varepsilon_a>0$ が存在し，$B(a,\varepsilon_a)\subset O$ となる．よって，$O=\bigcup_{a\in O} B(a,\varepsilon_a)$ となる．したがって，$\mathfrak{B}$ は $d$ により定まる位相の基底である．

p.183 下から 9 行目　$a$, $b\in\mathbf{R}$, $a<b$ とすると，$(a,b)=(a,+\infty)\cap(-\infty,b)$ である．よって，任意の有界開区間は 2 つの無限開区間の共通部分として表すことができる．

## §24 の ✍ のマーク

p.191 上から 5 行目　まず，

$$\begin{aligned} {p_X}^{-1}(O_X) &= \{(x,y) \in X \times Y \mid p_X(x,y) \in O_X\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in O_X\} \\ &= O_X \times Y \end{aligned}$$

である．同様に，${p_Y}^{-1}(O_Y) = X \times O_Y$ である．よって，(24.6) の左側の等式がなりたつ．次に，

$$\begin{aligned} (O_X \times Y) \cap (X \times O_Y) &= \{(x,y) \in X \times Y \mid (x,y) \in O_X \times Y \text{ かつ } (x,y) \in X \times O_Y\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in O_X,\ y \in O_Y\} \\ &= O_X \times O_Y \end{aligned}$$

である．よって，(24.6) の右側の等式がなりたつ．

p.193 上から 11 行目　$\mathfrak{O}$ が定義 20.1 (1)〜(3) の位相の条件をみたすことを示せばよい．

位相の条件 (1)　まず，$\lambda \in \Lambda$ とすると，$f_\lambda^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{O}_\lambda$ である．よって，$\emptyset \in \mathfrak{O}$ である．また，$\lambda \in \Lambda$ とすると，$f_\lambda^{-1}(X) = X_\lambda \in \mathfrak{O}_\lambda$ である．よって，$X \in \mathfrak{O}$ である．したがって，$\mathfrak{O}$ は定義 20.1 (1) の位相の条件をみたす．

位相の条件 (2)　$O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ とする．このとき，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，$f_\lambda^{-1}(O_1)$, $f_\lambda^{-1}(O_2) \in \mathfrak{O}_\lambda$ である．よって，$f_\lambda^{-1}(O_1 \cap O_2) = f_\lambda^{-1}(O_1) \cap f_\lambda^{-1}(O_2) \in \mathfrak{O}_\lambda$ となる．したがって，$O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$ である．以上より，$\mathfrak{O}$ は定義 20.1 (2) の位相の条件をみたす．

位相の条件 (3)　$(O_\mu)_{\mu \in \mathrm{M}}$ を $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族とする．このとき，任意の $\lambda \in \Lambda$ および $\mu \in \mathrm{M}$ に対して，$f_\lambda^{-1}(O_\mu) \in \mathfrak{O}_\lambda$ である．よって，$f_\lambda^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} O_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} f_\lambda^{-1}(O_\mu) \in \mathfrak{O}_\lambda$ となる．したがって，$\bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} O_\mu \in \mathfrak{O}$ である．以上より，$\mathfrak{O}$ は定義 20.1 (3) の位相の条件をみたす．

## §25 の ✍ のマーク

p.199 上から 4 行目　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{a}; \varepsilon)$ とし，$\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を結ぶ線分とする．このとき，$t \in [0,1]$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\|\gamma(t)-\boldsymbol{a}\| &= \|t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\| \\
&= \|t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y}-t\boldsymbol{a}-(1-t)\boldsymbol{a}\| \\
&= \|t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+(1-t)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a})\| \\
&\leq t\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| + (1-t)\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\| \\
&< t\varepsilon+(1-t)\varepsilon=\varepsilon
\end{aligned}
$$

である．よって，$\gamma(t)\in B(\boldsymbol{a};\varepsilon)$ となり，$\gamma$ の像は $B(\boldsymbol{a};\varepsilon)$ に含まれる．したがって，$B(\boldsymbol{a};\varepsilon)$ は凸である．

## §28 の ✍ のマーク

p.225 上から 10 行目　$\mathfrak{O}_\lambda$ が定義 20.1 (1)〜(3) の位相の条件をみたすことを示せばよい．

位相の条件 (1)　まず，$\mathfrak{O}_\lambda$ の定義より，$\emptyset\in\mathfrak{O}$ である．また，$Y_\lambda\setminus Y_\lambda=\emptyset$ であり，$\emptyset$ は有限集合なので，$Y_\lambda\in\mathfrak{O}_\lambda$ である．よって，$\mathfrak{O}_\lambda$ は定義 20.1 (1) の位相の条件をみたす．

位相の条件 (2)　$O_1, O_2\in\mathfrak{O}_\lambda$ とする．$O_1=\emptyset$ または $O_2=\emptyset$ のとき，$O_1\cap O_2=\emptyset$ である．よって，$O_1\cap O_2\in\mathfrak{O}_\lambda$ である．$O_1=O_2=\{\omega\}$ のとき，$O_1\cap O_2=\{\omega\}$ である．よって，$O_1\cap O_2\in\mathfrak{O}_\lambda$ である．「$O_1=\{\omega\}$ かつ $Y_\lambda\setminus O_2$ が有限集合」または「$Y_\lambda\setminus O_1$ が有限集合かつ $O_2=\{\omega\}$」のとき，$O_1\cap O_2=\emptyset$ である．よって，$O_1\cap O_2\in\mathfrak{O}_\lambda$ である．$Y_\lambda\setminus O_1$, $Y_\lambda\setminus O_2$ が有限集合のとき，$Y_\lambda\setminus(O_1\cap O_2)=(Y_\lambda\setminus O_1)\cup(Y_\lambda\setminus O_2)$ なので，$Y_\lambda\setminus(O_1\cap O_2)$ は有限集合である．よって，$O_1\cap O_2\in\mathfrak{O}_\lambda$ である．したがって，$\mathfrak{O}_\lambda$ は定義 20.1 (2) の位相の条件をみたす．

位相の条件 (3)　$(O_\mu)_{\mu\in\mathrm{M}}$ を $\mathfrak{O}_\lambda$ の元からなる集合族とする．任意の $\mu\in\mathrm{M}$ に対して，$O_\mu=\emptyset$ のとき，$\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}O_\mu=\emptyset$ である．よって，$\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}O_\mu\in\mathfrak{O}_\lambda$ である．任意の $\mu\in\mathrm{M}$ に対して，$O_\mu=\{\omega\}$ のとき，$\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}O_\mu=\{\omega\}$ である．よって，$\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}O_\mu\in\mathfrak{O}_\lambda$ である．ある $\mu_0\in\mathrm{M}$ に対して，$O_{\mu_0}\neq\emptyset$, $\{\omega\}$ のとき，$Y_\lambda\setminus\left(\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}O_\mu\right)=\bigcap_{\mu\in\mathrm{M}}(Y_\lambda\setminus O_\mu)\subset Y_\lambda\setminus O_{\mu_0}$ である．ここで，$Y_\lambda\setminus O_{\mu_0}$ は有限集合なので，$Y_\lambda\setminus\left(\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}O_\mu\right)$ は有限集合である．よって，$\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}O_\mu\in\mathfrak{O}_\lambda$ である．したがって，$\mathfrak{O}_\lambda$ は定義 20.1 (3) の位相の条件をみたす．

[⇨ スペースの関係上，次のページに続きます]

## §29 の ✍ のマーク

p.230 上から 6 行目　まず，$f,\ g \in C(X)$ とすると，$d$ の定義より，$d(f,g) \geq 0$ である．また，$d(f,g)=0$ となるのは $\max\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\}=0$ より，任意の $x \in X$ に対して，$f(x)-g(x)=0$ となるとき，すなわち，$f=g$ のときに限る．よって，$d$ は正値性（定義 16.1 (1)）をみたす．次に，$f,\ g \in C(X)$ とすると，$d$ の定義より，

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \max\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\} \\ &= \max\{|g(x)-f(x)| \mid x \in X\} = d(g,f) \end{aligned}$$

である．よって，$d$ は対称性（定義 16.1 (2)）をみたす．さらに，$f,\ g,\ h \in C(X)$ とすると，絶対値に対する三角不等式より，任意の $x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned} \big|f(x)-h(x)\big| &= \big|\big(f(x)-g(x)\big)+\big(g(x)-h(x)\big)\big| \\ &\leq \big|f(x)-g(x)\big|+\big|g(x)-h(x)\big| \end{aligned}$$

である．よって，$d$ の定義より，

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \max\{|f(x)-h(x)| \mid x \in X\} \\ &\leq \max\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\} + \max\{|g(x)-h(x)| \mid x \in X\} \\ &= d(f,g)+d(g,h) \end{aligned}$$

である．したがって，$d$ は三角不等式（定義 16.1 (3)）をみたす．以上より，$d$ は $C(X)$ の距離である．

p.232 上から 4 行目　$a \in X$，$\varepsilon > 0$ とする．このとき，$x \in B\left(a; \frac{\varepsilon}{c}\right)$ とすると，(29.9) より，$d\left(f(x), f(a)\right) \leq cd(x,a) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ である．よって，$f(x) \in B\left(f(a); \varepsilon\right)$ である．したがって，$f$ は $a$ で連続である．$a$ は任意なので，$f$ は連続である．

## §30 の ✍ のマーク

p.237 上から 4 行目　$n \in \mathbf{N}$ に対して，集合 $B_n$ を $B_1 = A_1$，$B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ により定める．このとき，$A_n$ は有限集合であることより，$B_n$ も有限集合である．さらに，$i,\ j \in \mathbf{N}$，$i \neq j$ のとき，$B_i \cap B_j = \emptyset$ であり，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ となる．$A$ が有限集合でないとき，空でない $B_n$ に対して，$B_n = \{b_{n1},\ b_{n2},\ \cdots,\ b_{nm_n}\}$ と表しておく．このとき，写像 $f : A \to \mathbf{N}$ を $f(b_{1j}) = j$ $(B_1 \neq \emptyset,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m_1)$，$f(b_{ij}) =$

$m_1 + m_2 + \cdots + m_{i-1} + j$ $(i \in \{2, 3, 4, \cdots\},\ B_i \neq \emptyset,\ j = 1, 2, \cdots, m_i)$ により定めると，$f$ は全単射となる．よって，$A$ は可算である．したがって，$A$ は高々可算である．

**p.238 下から 3 行目**　(30.7), (30.8) より，$x_l^{(k)}, x_m^{(k)} \in B\left(a_k; \frac{1}{2k}\right)$ となる．よって，三角不等式より，$d\left(x_l^{(k)}, x_m^{(k)}\right) \leq d\left(x_l^{(k)}, a_k\right) + d\left(a_k, x_m^{(k)}\right) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$ となる．

**p.239 下から 11 行目**　$B\left(a; \frac{1}{k}\right) \cap A_k \neq \emptyset$ であることを示せばよい．このことを背理法により示す．$B\left(a; \frac{1}{k}\right) \cap A_k = \emptyset$ であると仮定する．このとき，$B\left(a; \frac{1}{k}\right) \subset X \setminus A_k$ である．よって，内部および外部の定義より，$B\left(a; \frac{1}{k}\right) \subset (X \setminus A_k)^i = A_k^e$，すなわち，$B\left(a; \frac{1}{k}\right) \subset A_k^e$ となる．したがって，$a \in A_k^e$ となり，これは $a \in \overline{A_k}$ であることに矛盾する．以上より，$B\left(a; \frac{1}{k}\right) \cap A_k \neq \emptyset$ である．

**p.241 上から 4 行目**　$X$ を任意の点列がコーシー 列を部分列にもつ距離空間とする．$X$ が全有界であることを背理法により示す．$X$ が全有界ではないと仮定する．このとき，例題 30.1 のように点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めると，$m \neq n$ $(m, n \in \mathbf{N})$ ならば，$d(a_m, a_n) > \varepsilon$ である．よって，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー 列を部分列にもたない．これは矛盾である．したがって，$X$ は全有界である．

## § 31 の ✍ のマーク

**p.246 下から 5 行目**　まず，$[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}] \in \tilde{X}$ とすると，$\tilde{d}$ の定義および $d$ の正値性（定義 16.1 (1)）より，

$$\tilde{d}\left([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]\right) \geq 0$$

である．さらに，$\tilde{d}\left([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]\right) = 0$ となるのは $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ より，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ となるとき，すなわち，$[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}] = [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]$ のときに限る．よって，$\tilde{d}$ は正値性（定義 16.1 (1)）をみたす．

次に，$[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}] \in \tilde{X}$ とすると，$\tilde{d}$ の定義および $d$ の対称性（定義 16.1 (2)）より，

$$\begin{aligned}\tilde{d}\left([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]\right) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) \\ &= \tilde{d}\left([\{y_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]\right)\end{aligned}$$

である．よって，$\tilde{d}$ は対称性（定義 16.1 (2)）をみたす．

さらに，$[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$, $[\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]$, $[\{z_n\}_{n=1}^{\infty}] \in \tilde{X}$ とすると，$\tilde{d}$ の定義および $d$ に対する三角不等式（定義 16.1 (3)）より，

$$\begin{aligned}\tilde{d}\big([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{z_n\}_{n=1}^{\infty}]\big) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) \\ &= \tilde{d}\big([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]\big) + \tilde{d}\big([\{y_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{z_n\}_{n=1}^{\infty}]\big)\end{aligned}$$

である．よって，$\tilde{d}$ は三角不等式（定義 16.1 (3)）をみたす．したがって，$\tilde{d}$ は $\tilde{X}$ の距離である．

## § 32 の ✍ のマーク

p.252 下から 4 行目　定義 32.1 (1) が「(1)′ $x$, $y \in X$ を異なる 2 個の点とする．$x$ のある近傍 $U_x$ および $y$ のある近傍 $U_y$ が存在し，$U_x \cap U_y = \emptyset$ となるとき，$x$ と $y$ は近傍により分離されるという」と同値であることを示す．

(1) ⇒ (1)′　(1) において，$O_x$, $O_y$ はそれぞれ $x$ の開近傍，$y$ の開近傍である．よって，(1)′ がなりたつ．

(1)′ ⇒ (1)　(1)′ および近傍の定義より，$X$ のある開集合 $O_x$, $O_y$ が存在し，$x \in O_x \subset U_x$，$y \in O_y \subset U_y$ となる．このとき，$O_x \cap O_y \subset U_x \cap U_y = \emptyset$ より，$O_x \cap O_y = \emptyset$ である．よって，(1) がなりたつ．

p.255 下から 1 行目　(32.1) ⇒ (32.7)　$x \in O_x$，$y \in O_y$ より，$(x, y) \in O_x \times O_y$ である．また，$(a, b) \in O_x \times O_y$ とすると，$O_x \cap O_y = \emptyset$ より，$a \neq b$, すなわち，$(a, b) \notin \Delta$ である．よって，$(a, b) \in (X \times X) \setminus \Delta$ である．したがって，$O_x \times O_y \subset (X \times X) \setminus \Delta$ である．以上より，(32.7) がなりたつ．

(32.7) ⇒ (32.1)　$(x, y) \in O_x \times O_y$ より，$x \in O_x$, $y \in O_y$ である．次に，$O_x \cap O_y = \emptyset$ であることを背理法により示す．$O_x \cap O_y \neq \emptyset$ であると仮定する．このとき，ある $z \in O_x \cap O_y$ が存在する．よって，$(z, z) \in O_x \times O_y$ かつ $(z, z) \in \Delta$ である．これは $O_x \times O_y \subset (X \times X) \setminus \Delta$ であることに矛盾する．したがって，$O_x \cap O_y = \emptyset$ である．以上より，(32.1) がなりたつ．

[⇨ スペースの関係上，次のページに続きます]

## §33 の ✍ のマーク

p.260 下から 6 行目　$X \setminus \emptyset = X$，$X \setminus \{p\} = \{q, r\}$，$X \setminus \{q, r\} = \{p\}$，$X \setminus X = \emptyset$ より，$X$ の閉集合系は $\mathfrak{D}$ に一致する．

p.260 下から 4 行目　$X$ の点とその点を含まない閉集合の組合せは「$p$ と $\{q, r\}$」,「$q$ と $\{p\}$」,「$r$ と $\{p\}$」の 3 個である．「$p$ と $\{q, r\}$」についてはすでに述べているので，「$q$ と $\{p\}$」,「$r$ と $\{p\}$」が開集合により分離されることを示せばよい．まず，$\{q, r\}$ は $q \in \{q, r\}$ となる $X$ の開集合であり，$\{p\}$ は $\{p\} \subset \{p\}$ となる $X$ の開集合である．さらに，$\{q, r\} \cap \{p\} = \emptyset$ である．よって，$q$ と $\{p\}$ は開集合により分離される．次に，$\{q, r\}$ は $r \in \{q, r\}$ となる $X$ の開集合であり，$\{p\}$ は $\{p\} \subset \{p\}$ となる $X$ の開集合である．さらに，$\{q, r\} \cap \{p\} = \emptyset$ である．よって，$r$ と $\{p\}$ は開集合により分離される．

p.261 上から 7 行目　$X$ をハウスドルフ空間，$x, y \in X$ を異なる 2 個の点とする．このとき，定義 32.1 より，$X$ のある開集合 $O_x, O_y$ が存在し，(32.1) がなりたつ．よって，$x \in O_x$，$y \notin O_x$，$x \notin O_y$，$y \in O_y$ である．したがって，定義 33.2 より，$X$ は $T_1$ 空間である．すなわち，ハウスドルフ空間は $T_1$ 空間である．

p.262 下から 5 行目　$X$ を正則空間，$x, y \in X$ を異なる 2 個の点とする．このとき，定義 33.3 より，$X$ は第一分離公理をみたす．よって，定理 33.1 より，$\{y\}$ は $X$ の閉集合である．さらに，定義 33.3 より，$X$ は第三分離公理をみたすので，定義 33.1 より，$X$ のある開集合 $O, O'$ が存在し，$x \in O$，$\{y\} \subset O'$，$O \cap O' = \emptyset$ となる．すなわち，$x \in O$，$y \in O'$，$O \cap O' = \emptyset$ である．したがって，定義 32.1 より，$X$ はハウスドルフである．すなわち，正則空間はハウスドルフである．

p.264 上から 10 行目　$X$ を正規空間，$x \in X$ とし，$A$ を $x$ を含まない $X$ の閉集合とする．このとき，定義 33.4 (3) より，$X$ は第一分離公理をみたす．よって，定理 33.1 より，$\{x\}$ は $X$ の閉集合である．さらに，定義 33.4 (3) より，$X$ は第四分離公理をみたすので，定義 33.4 (1), (2) より，$X$ のある開集合 $O, O'$ が存在し，$\{x\} \subset O$，$A \subset O'$，$O \cap O' = \emptyset$ となる．すなわち，$x \in O$，$A \subset O'$，$O \cap O' = \emptyset$ である．したがって，定義 33.1 より，$X$ は第三分離公理をみたす．以上および定義 33.3 より，$X$ は正則空間である．すなわち，正規空間は正則空間である．

[⇨ スペースの関係上，次のページに続きます]

## §36 の ✍ のマーク

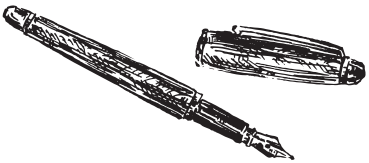
p.279 脚注 2) まず，$[a,b]$ は有界閉区間なので，ハイネ – ボレルの被覆定理（定理 27.2）より，$[a,b]$ はコンパクトである．よって，$([a,b],\iota)$ は定義 36.1 (1) の条件をみたす．次に，$\iota((a,b))=(a,b)$ なので，$\iota$ の値域を $[a,b]$ の部分空間 $\iota((a,b))$ へ制限して得られる $(a,b)$ から $\iota((a,b))$ への写像は恒等写像 $1_{(a,b)}:(a,b)\to(a,b)$ である．ここで，$1_{(a,b)}$ の定義域および値域は $\mathbf{R}$ の部分空間なので，$1_{(a,b)}$ は同相写像である．よって，$([a,b],\iota)$ は定義 36.1 (2) の条件をみたす．さらに，(19.11) より，$\overline{\iota((a,b))}=\overline{(a,b)}=[a,b]$ である．よって，$([a,b],\iota)$ は定義 36.1 (3) の条件をみたす．

p.283 下から 4 行目 $\mathbf{R}^n$ はコンパクトではないので，定理 36.4 より，$\mathbf{R}^n$ の一点コンパクト化 $\hat{\mathbf{R}}^n$ を考えることができる．また，問 36.3 より，$f:\mathbf{R}^n\to S^n$ は連続となることに注意する．まず，写像 $g:\hat{\mathbf{R}}^n\to S^n$ を

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in\mathbf{R}^n),\\ (\mathbf{0},1) & (x=\infty)\end{cases}$$

により定めると，$g$ は全単射となる．ここで，$O$ を $S^n$ の開集合とする．$O=S^n$ のとき，$g^{-1}(O)=g^{-1}(S^n)=\hat{\mathbf{R}}^n$ である．よって，$g^{-1}(O)$ は $\hat{\mathbf{R}}^n$ の開集合である．$O\neq S^n$，$(\mathbf{0},1)\in O$ のとき，$\mathbf{R}^{n+1}$ のユークリッド距離を考えると，ある $\varepsilon>0$ が存在し，$B((\mathbf{0},1);\varepsilon)\cap S^n\subset O$ となる．このとき，

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}^n\setminus g^{-1}(O)&=g^{-1}(S^n)\setminus g^{-1}(O)\\&=g^{-1}(S^n\setminus O)\\&=f^{-1}(S^n\setminus O)\\&\subset f^{-1}\left(S^n\setminus B((\mathbf{0},1);\varepsilon)\right),\end{aligned}$$

すなわち，$\hat{\mathbf{R}}^n\setminus g^{-1}(O)=f^{-1}(S^n\setminus O)\subset f^{-1}\big(S^n\setminus B((\mathbf{0},1);\varepsilon)\big)$ となる．よって，$f$ の連続性とあわせると，$\hat{\mathbf{R}}^n\setminus g^{-1}(O)$ は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合となり，ハイネ – ボレルの被覆定理（問 28.2 (2)）より，$\hat{\mathbf{R}}^n\setminus g^{-1}(O)$ は $\mathbf{R}^n$ のコンパクト閉集合である．すなわち，$g^{-1}(O)$ は $\hat{\mathbf{R}}^n$ の開集合である．$(\mathbf{0},1)\notin O$ のとき，$g^{-1}(O)=f^{-1}(O)$ となる．よって，$f$ の連続性より，$g^{-1}(O)$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合となるので，$g^{-1}(O)$ は $\hat{\mathbf{R}}^n$ の開集合である．したがって，$g$ は連続である．さらに，$S^n$ はハウスドルフ空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分空間なので，問 32.2 より，$S^n$ はハウスドルフである．以上より，$g$ はコンパクト空間 $\hat{\mathbf{R}}^n$ からハウスドルフ空間

$S^n$ への全単射連続写像となるので，定理 32.5 より，$g$ は同相写像である．すなわち，$S^n$ は $\hat{\mathbf{R}}^n$ と同相である．