詳細解答

- この別冊 PDF ファイルは『**手を動かしてまなぶ　続・線形代数**』（裳華房，2021 年刊）の**節末問題の詳細解答**です．書籍を読み進む際に活用すると効果的です．
- この別冊 PDF ファイルを印刷して利用するときは，**「小冊子」モード**で印刷して二つ折にすると，A5 判サイズで本の巻末に挟み込んで利用することができます．

(2021 年 11 月 12 日版)

§1 の問題解答

解 1.1　$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である．

解 1.2　(1) A の固有多項式は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\lambda - (-2) \cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda = 1 \pm i$ である．したがって，A は 2 個の異なる固有値 $\lambda = 1 \pm i$ をもつので，定理 1.5 より，A は対角化可能である．

(2) まず，固有値 $\lambda = 1 + i$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において $\lambda = 1 + i$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，$\{(1+i)E - A\}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$(-1+i)x_1 - 2x_2 = 0$，$x_1 + (1+i)x_2 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_2 = -c$ とおくと，解は $x_1 = (1+i)c$，$x_2 = -c$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)c \\ -c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$c = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 1 + i$ に対する A の固有ベクトルである．次に，固有値 $\lambda = 1 - i$ に対する A の固有ベクトルを求める．上の計算より，$A\boldsymbol{p}_1 = (1+i)\boldsymbol{p}_1$ である．A の成分がすべて実数であることに注意すると，$A\overline{\boldsymbol{p}_1} = (1-i)\overline{\boldsymbol{p}_1}$ となる．$\boldsymbol{p}_1$ はすでに求めているので，すなわち，$A\begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} = (1-i)\begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$ である．よって，ベクトル $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 1 - i$ に対する A の固有ベクトルである．以

上より，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，P は正則となるので，逆行列 P^{-1} が存在する．さらに，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ となり，A は P によって対角化される．

解 1.3　$W(\lambda) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \right\}$ である．

解 1.4　(1) A が上三角行列であることに注意すると，A の固有値 λ は対角成分の $\lambda = 1,\ i$ となる（1 は 2 重解）．まず，固有値 $\lambda = 1$ に対する A の固有空間 $W(1)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = 1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-x_2 = 0$，$(1-i)x_2 = 0$ となり，$c_1,\ c_2 \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c_1$，$x_3 = c_2$ とおくと，解は $x_1 = c_1$，$x_2 = 0$，$x_3 = c_2$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$W(1) = \left\{ c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c_1,\ c_2 \in \mathbf{C} \right\}$ である．次に，固有値 $\lambda = i$ に対する A の固有空間 $W(i)$ を求める．$(*)$ において $\lambda = i$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(iE - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} i-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$(i-1)x_1 - x_2 = 0$，$(i-1)x_3 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = (-1+i)c$，$x_3 = 0$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} c \\ (-1+i)c \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので，$W(i) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{C} \right\}$ である．以上より，$\dim\bigl(W(1)\bigr) + \dim\bigl(W(i)\bigr) = 2+1 = 3$ となるので，定理 1.6 より，A は対角化可能である．

(2) (1) の計算より，$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1+i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，P は正則となるので，逆行列 P^{-1} が存在する．さらに，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ となり，A は P によって対角化される．

解 1.5　(1) n に関する数学的帰納法により示す．$n=2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ なので，$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a_2 & \lambda + a_1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + a_1) - (-1)\cdot a_2 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ である．よって，題意がなりたつ．$n = k$ $(k = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ のとき，題意がなりたつと仮定する．

$n = k+1$ とすると，$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{1+1}\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & \lambda + a_1 \end{vmatrix} + (-1)^{(k+1)+1} a_{k+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

（∵ 第 1 列に関する余因子展開）$= \lambda(\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \cdots + a_{k-1}\lambda + a_k) + (-1)^{k+2}a_{k+1}\cdot(-1)^k$（∵ 帰納法の仮定）$= \lambda^{k+1} + a_1\lambda^k + a_2\lambda^{k-1} + \cdots + a_k\lambda + a_{k+1}$ である．よって，$n = k+1$ のとき，題意がなりたつ．したがって，題意がなりたつ．

[⇨ 次のページに続きます]

(2) λ を A の固有値，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を固有値 λ に対する A の固有ベクトルとする．このとき，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ より，$x_2 = \lambda x_1$，$x_3 = \lambda x_2$，$\cdots$，$x_{n-1} = \lambda x_{n-2}$，$x_n = \lambda x_{n-1}$，$-a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - a_{n-2}x_3 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n = \lambda x_n$ である．また，(1) より，$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ である．よって，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c \\ c\lambda \\ \vdots \\ c\lambda^{n-1} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ となり，固有値 λ に対する A の固有空間の次元は 1 である．このことと A の固有方程式が 2 重解をもつことをあわせると，すべての固有空間の次元の和は n より小さい．したがって，定理 1.6 より，A は対角化可能ではない．

§ 2 の問題解答

解 2.1　2 次の上三角行列，下三角行列はそれぞれ $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$，3 次の上三角行列，下三角行列はそれぞれ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ である．ただし，a, b, c, d, e, $f \in \mathbf{C}$ である．

解 2.2　(1) $\operatorname{Im} f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in V\}$ である．
(2) $f(W) \subset W$ となること．
(3) $\boldsymbol{x} \in W$ とすると，$f(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} f \subset W$，すなわち，$f(\boldsymbol{x}) \in W$ である．よって，W は f の不変部分空間である．

解 2.3　(1) $\boldsymbol{x} \in W(\lambda)$ とする．このとき，$f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ である．さらに，$f\big(g(\boldsymbol{x})\big) = (f \circ g)(\boldsymbol{x}) = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g\big(f(\boldsymbol{x})\big) = g(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda g(\boldsymbol{x})$ である．すなわち，$f\big(g(\boldsymbol{x})\big) = \lambda g(\boldsymbol{x})$ となり，$g(\boldsymbol{x}) \in W(\lambda)$ である．よって，$W(\lambda)$ は g の不変部分空間である．
(2) $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} f$ とする．このとき，ある $\boldsymbol{x} \in V$ が存在し，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ となる．さらに，$g(\boldsymbol{y}) = g\big(f(\boldsymbol{x})\big) = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = (f \circ g)(\boldsymbol{x}) = f\big(g(\boldsymbol{x})\big)$ である．すなわち，$g(\boldsymbol{y}) = f\big(g(\boldsymbol{x})\big)$ となり，$g(\boldsymbol{y}) \in \operatorname{Im} f$ である．よって，$\operatorname{Im} f$ は g の不変部分空間である．

解 2.4　(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ である．

(2) 固有多項式は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$

(∵ サラスの方法) $= (\lambda-1)\left(\lambda^2-4\lambda+4\right) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$ である．

(3) (2) およびケーリー－ハミルトンの定理 (定理 2.2) より，$A^3 - 5A^2 + 8A - 4E = O$ である．よって，$A^5 - 5A^4 + 8A^3 - 5A^2 + A = A^2\left(A^3 - 5A^2 + 8A - 4E\right) - A^2 + A \overset{(1)}{=}$ $A^2O - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ である．

解 2.5　定理 2.1 より，ある正則な $P \in M_n(\mathbf{C})$ が存在し，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ と表される．さらに，$k = 1, 2, \cdots$ のとき，$\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP$ がなりたつことに注意すると，$P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & * \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ と表される．よって，$P^{-1}f(A)P = f\left(P^{-1}AP\right) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & * \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$ と表される．したがって，$f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1),\ f(\lambda_2),\ \cdots,\ f(\lambda_n)$ である．

解 2.6　(1) $\boldsymbol{x} \in W$ とすると，W の定義より，

$$\boldsymbol{x} = a_0A^m\boldsymbol{x}_0 + a_1A^{m-1}\boldsymbol{x}_0 + \cdots + a_{m-1}A\boldsymbol{x}_0 + a_m\boldsymbol{x}_0 \qquad (*)$$

と表される．ただし，m は 0 以上の整数であり，$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m \in \mathbf{C}$ である．このとき，$A\boldsymbol{x} = a_0A^{m+1}\boldsymbol{x}_0 + a_1A^m\boldsymbol{x}_0 + \cdots + a_{m-1}A^2\boldsymbol{x}_0 + a_mA\boldsymbol{x}_0$ となるので，$A\boldsymbol{x} \in W$ である．よって，W は A の不変部分空間である．

(2) l_0 の定義より，$\boldsymbol{x}_0,\ A\boldsymbol{x}_0, \cdots,\ A^{l_0}\boldsymbol{x}_0$ は 1 次従属である．よって，$d_1 = d_2 = \cdots = d_{l_0+1}$

$=0$ ではない $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{l_0+1} \in \mathbf{C}$ が存在し，$d_1\boldsymbol{x}_0 + d_2 A\boldsymbol{x}_0 + \cdots + d_{l_0+1}A^{l_0}\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ となる．ここで，$d_{l_0+1} = 0$ であると仮定すると，$d_1\boldsymbol{x}_0 + d_2 A\boldsymbol{x}_0 + \cdots + d_{l_0}A^{l_0-1}\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ となる．さらに，$\boldsymbol{x}_0,\ A\boldsymbol{x}_0, \cdots,\ A^{l_0-1}\boldsymbol{x}_0$ は 1 次独立なので，$d_1 = d_2 = \cdots = d_{l_0} = 0$ となり，これは矛盾である．したがって，$d_{l_0+1} \neq 0$ となり，$c_j = -\frac{d_j}{d_{l_0+1}}$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_0)$ とおくと，あたえられた等式が得られる．

(3) (2) より，$\boldsymbol{x}_0,\ A\boldsymbol{x}_0, \cdots,\ A^{l_0-1}\boldsymbol{x}_0$ が W を生成することを示せばよい［⇨［藤岡 1］**定義 15.1**］．$\boldsymbol{x} \in W$ とすると，W の定義より，$\boldsymbol{x}$ は $(*)$ のように表される．ここで，k を $k \geq l_0$ となる自然数とすると，(2) より，$A^k\boldsymbol{x}_0$ は $\boldsymbol{x}_0,\ A\boldsymbol{x}_0,\ \cdots,\ A^{l_0-1}\boldsymbol{x}_0$ の 1 次結合で表される．よって，$\boldsymbol{x} \in W$ は $\boldsymbol{x}_0,\ A\boldsymbol{x}_0,\ \cdots,\ A^{l_0-1}\boldsymbol{x}_0$ の 1 次結合で表される．したがって，$\boldsymbol{x}_0,\ A\boldsymbol{x}_0, \cdots,\ A^{l_0-1}\boldsymbol{x}_0$ は W を生成する．

§ 3 の問題解答

解 3.1　2 つの対角化可能な正方行列が同じ正則行列によって対角化されること．

解 3.2　(1) まず，A の固有多項式は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 3 \\ -18 & \lambda + 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 7)(\lambda + 8) - 3 \cdot (-18) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda = 1,\ -2$ である．したがって，A は 2 個の異なる固有値 $\lambda = 1,\ -2$ をもつので，定理 1.5 より，A は対角化可能である．また，B の固有多項式は $\phi_B(\mu) = |\mu E - B| = \begin{vmatrix} \mu - 7 & 2 \\ -12 & \mu + 3 \end{vmatrix} = (\mu - 7)(\mu + 3) - 2 \cdot (-12) = \mu^2 - 4\mu + 3 = (\mu - 1)(\mu - 3)$ である．よって，固有方程式 $\phi_B(\mu) = 0$ を解くと，B の固有値 μ は $\mu = 1,\ 3$ である．したがって，B は 2 個の異なる固有値 $\mu = 1,\ 3$ をもつので，定理 1.5 より，B は対角化可能である．

(2) まず，$AB = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 30 & -12 \end{pmatrix}$ である．また，$BA = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 18 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 30 & -12 \end{pmatrix}$ である．よって，$AB = BA$ となり，(1) および定理 3.3 より，$A,\ B$ は同時対角化可能である．

(3) まず，$A\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{p}_1$ である．また，$B\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_1$ である．よって，$\boldsymbol{p}_1$ は固有値 $\lambda = -2$ に対する A の固有

ベクトルであり，かつ，固有値 $\mu=1$ に対する B の固有ベクトルである．したがって，$\boldsymbol{p}_1$ は A, B の同時固有ベクトルである．

(4) まず，固有値 $\lambda=1$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式 $(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ において $\lambda=1$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -18 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-6x_1+3x_2=0$，$-18x_1+9x_2=0$ となり，$c\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c$ とおくと，解は $x_1=c$，$x_2=2c$ である．したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と表されるので，$c=1$ としたベクトル $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda=1$ に対する A の固有ベクトルである．ここで，$B\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}=3\boldsymbol{p}_2$ である．すなわち，$\boldsymbol{p}_2$ は固有値 $\mu=3$ に対する B の固有ベクトルである．以上と (3) より，$P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと，P は正則となるので，逆行列 P^{-1} が存在する．さらに，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となり，A, B は P によって同時対角化される．

解 3.3　(1) A の対角化可能性　A が上三角行列であることに注意すると，A の固有値 λ は対角成分の $\lambda=1,\,2$ となる（1 は 2 重解）．まず，固有値 $\lambda=1$ に対する A の固有空間 $W_A(1)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda=1$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$x_2+x_3=0$，$-x_2-x_3=0$ となり，c_1, $c_2\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c_1$，$x_2=c_2$ とおくと，解は $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=-c_2$ である．したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と表さ

れるので，$W_A(1)=\left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \middle| \, c_1,\, c_2\in\mathbf{C}\right\}$ である．次に，固有値 $\lambda=2$ に対する A の固有空間 $W_A(2)$ を求める．$(*)$ において $\lambda=2$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，$(2E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ である．よって，$x_1+x_2+x_3=0$，$-x_3=0$，$x_3=0$ となり，$c\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c$ とおくと，解は $x_1=c$，$x_2=-c$，$x_3=0$ である．したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\-c\\0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ と表されるので，$W_A(2)=\left\{ c\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \middle| \, c\in\mathbf{C}\right\}$ である．以上より，$\dim\bigl(W_A(1)\bigr)+\dim\bigl(W_A(2)\bigr)=2+1=3$ となるので，定理1.6より，A は対角化可能である．

B の対角化可能性　B が下三角行列であることに注意すると，B の固有値 μ は対角成分の $\mu=1,\,2$ となる（2 は 2 重解）．まず，固有値 $\mu=1$ に対する B の固有空間 $W_B(1)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$$(\mu E-B)\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \qquad (**)$$

において $\mu=1$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，$(E-B)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ である．よって，$-x_1=0$, $x_1=0$, $-x_1-x_2-x_3=0$ となり，$c\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_2=c$ とおくと，解は $x_1=0$，$x_2=c$，$x_3=-c$ である．したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c\\-c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ と表されるので，$W_B(1)=\left\{ c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \middle| \, c\in\mathbf{C}\right\}$ である．次に，固有値 $\mu=2$ に対する B の固有空間 $W_B(2)$ を求め

る．$(**)$ において $\mu=2$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(2E-B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$x_1+x_2=0$，$-x_1-x_2=0$ となり，$c_1,\, c_2 \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c_1$，$x_3=c_2$ とおくと，解は $x_1=c_1$，$x_2=-c_1,\, x_3=c_2$ である．したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$W_B(2)=\left\{ c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c_1,\, c_2 \in \mathbf{C} \right\}$ である．以上より，$\dim\bigl(W_B(1)\bigr)+\dim\bigl(W_B(2)\bigr)=1+2=3$ となるので，定理 1.6 より，B は対角化可能である．

(2) まず，$AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ である．また，$BA=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ である．よって，$AB=BA$ となり，(1) および定理 3.3 より，$A,\, B$ は同時対角化可能である．

(3) まず，$|Q|=1\cdot 1\cdot 1$（∵ サラスの方法）$=1\neq 0$ なので，Q は正則である．また，(1) の計算より，Q の第 1 列，第 2 列は固有値 $\lambda=1$ に対する A の固有ベクトル，Q の第 3 列は固有値 $\lambda=2$ に対する A の固有ベクトルである．よって，$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．さらに，$BQ=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\overset{[\Rightarrow(3.14)]}{=}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．すなわち，$BQ=Q\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

である．したがって，$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

(4) ブロックに分割して計算する．まず，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．よって，(3) より，$R^{-1}(Q^{-1}BQ)R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

(5) 定理 3.3 の証明より，$P = QR$ とおけばよい．(3), (4) より，$P = QR =$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．このとき，$P^{-1}AP =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となり，A, B は P によって同時対角化される．

§4 の問題解答

解 4.1　(1) A はスカラー行列ではない 2 次の正方行列なので，A の固有値が 1 個のみであることを示せばよい．まず，A の固有多項式は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5) - (-1) \cdot 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda = 3$（2 重解）である．したがって，A は 1 個の固有値 $\lambda = 3$ のみをもち，対角化可能ではない．

(2) まず, 固有値 $\lambda = 3$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ において $\lambda = 3$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，$(3E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$2x_1 - x_2 = 0$，$4x_1 - 2x_2 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = 2c$ である．したがって，

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\2c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ と表されるので，$c=1$ としたベクトル $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda=3$ に対する A の固有ベクトルである．次に，連立 1 次方程式 $(A-3E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ とすると，$\begin{pmatrix}-2&1\\-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ である．この方程式の拡大係数行列 $\left(\begin{array}{c|c}A-3E&\boldsymbol{b}\end{array}\right)$ の行に関する基本変形を行うと，$\left(\begin{array}{c|c}A-3E&\boldsymbol{b}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}-2&1&1\\-4&2&2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{第 2 行}-\text{第 1 行}\times 2}\left(\begin{array}{cc|c}-2&1&1\\0&0&0\end{array}\right)$ となる．よって，方程式に戻すと，$-2x_1+x_2=1$ である．したがって，$c\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c$ とおくと，解は $x_1=c$，$x_2=2c+1$ である．すなわち，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\2c+1\end{pmatrix}$ と表されるので，$c=1$ としたベクトル $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ は解である．以上より，$P=\begin{pmatrix}(A-3E)\boldsymbol{x}_1&\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}&\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$ とおくと，P は正則となるので，逆行列 P^{-1} が存在する．さらに，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$ となり，A のジョルダン標準形が得られる．

解 4.2　(1) まず，固有値 $\lambda=1$ に対する A の固有空間 $W(1)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda=1$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，$(E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&-4\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ である．よって，$x_1-x_2-4x_3=0$，$-x_3=0$ となり，$c\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c$ とおくと，解は $x_1=c$，$x_2=c$，$x_3=0$ である．したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\c\\0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ と表されるので，$W(1)=\left\{c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\,\middle|\,c\in\mathbf{C}\right\}$ である．次に，固有値 $\lambda=2$ に対する A の固有空間 $W(2)$ を求める．$(*)$ において $\lambda=2$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，$(2E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって, $x_1 = 0$, $x_1 - 4x_3 = 0$ となり, $c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として, $x_2 = c$ とおくと, 解は $x_1 = 0$, $x_2 = c$, $x_3 = 0$ である．したがって, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので, $W(2) = \left\{ c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{C} \right\}$ である．以上より, $\dim\bigl(W(1)\bigr) + \dim\bigl(W(2)\bigr) = 1 + 1 = 2 \neq 3$ となるので，定理 1.6 より，A は対角化可能ではない．

(2) まず，$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^3$，$(A - 2E)^2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とすると［⇨(4.40)］，$\boldsymbol{x}$ は c_1, $c_2 \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表される．ここで，(1) より，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W(2)$ であることに注意し，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく［⇨(4.39)］．このとき，$(A - 2E)\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．また, (1) より，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_2 \in W(1)$ である．したがって，$P = \begin{pmatrix} (A - 2E)\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，P は正則となるので，逆行列 P^{-1} が存在する．さらに，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり，A のジョルダン標準形が得られる．

解 4.3　(1) ① $(A - \lambda E)^2$, ② ケーリー－ハミルトン, ③ $W(\lambda)$, ④ O, ⑤ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(∵ $(A - \lambda E)P = \begin{pmatrix} (A - \lambda E)^2 \boldsymbol{x}_1 & (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1 & (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$

［⇨ 式変形とスペースの関係上，次のページに続きます］

$$\overset{\boldsymbol{x}_2\in W(\lambda)}{=}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & (A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1 & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$P\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix})$$

(2) $\dim\bigl(W(\lambda)\bigr)=1$ より，$W(\lambda)$ の基底 $\{\boldsymbol{y}_3\}$ が存在する．さらに，$\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2\in\mathbf{C}^3\setminus W(\lambda)$ を $\{\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}_3\}$ が $\mathbf{C}^3$ の基底となるように選んでおく．ここで，$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{y}_1=(A-\lambda E)^2\boldsymbol{y}_2=\mathbf{0}$ であると仮定する．このとき，$(A-\lambda E)\boldsymbol{y}_1,\ (A-\lambda E)\boldsymbol{y}_2\in W(\lambda)$ であり，$\dim\bigl(W(\lambda)\bigr)=1$ なので，$(c_1,c_2)\neq(0,0)$ となる $c_1,\ c_2\in\mathbf{C}$ が存在し，$c_1(A-\lambda E)\boldsymbol{y}_1+c_2(A-\lambda E)\boldsymbol{y}_2=\mathbf{0}$ となる．すなわち，$(A-\lambda E)(c_1\boldsymbol{y}_1+c_2\boldsymbol{y}_2)=\mathbf{0}$ である．よって，$c_1\boldsymbol{y}_1+c_2\boldsymbol{y}_2\in W(\lambda)$ となり，$\{\boldsymbol{y}_3\}$ は $W(\lambda)$ の基底なので，ある $c\in\mathbf{C}$ が存在し，$c_1\boldsymbol{y}_1+c_2\boldsymbol{y}_2=c\boldsymbol{y}_3$ となる．さらに，$\{\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}_3\}$ は $\mathbf{C}^3$ の基底なので，$c_1=c_2=c=0$ となる．これは $(c_1,c_2)\neq(0,0)$ であることに矛盾する．したがって，$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{y}_1\neq\mathbf{0}$ または $(A-\lambda E)^2\boldsymbol{y}_2\neq\mathbf{0}$ である．そこで，$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{y}_1\neq\mathbf{0}$ のとき，$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}_1$ とおき，$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{y}_1=\mathbf{0}$ のとき，$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}_2$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1\in\mathbf{C}^3\setminus W(\lambda)$，$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1\neq\mathbf{0}$ である．次に，$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1,\ (A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_1$ の 1 次関係 $c_1(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1+c_2(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1+c_3\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$ $(c_1,\ c_2,\ c_3\in\mathbf{C})$ を考える．この式の両辺に左から $(A-\lambda E)^2$ をかけると，ケーリー–ハミルトンの定理（定理 2.2）より，$(A-\lambda E)^3=O$ なので，$c_3(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$ である．さらに，$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1\neq\mathbf{0}$ なので，$c_3=0$ である．よって，$c_1(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1+c_2(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$ である．この式の両辺に左から $A-\lambda E$ をかけると，ケーリー–ハミルトンの定理（定理 2.2）より，$(A-\lambda E)^3=O$ なので，$c_2(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$ である．さらに，$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1\neq\mathbf{0}$ なので，$c_2=0$ である．したがって，$c_1(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$ となり，$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1\neq\mathbf{0}$ なので，$c_1=0$ である．以上より，$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1,\ (A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_1$ は 1 次独立である．このとき，$P=\begin{pmatrix}(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1 & (A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}$ とおくと，P は正則であり，$(A-\lambda E)P=\begin{pmatrix}(A-\lambda E)^3\boldsymbol{x}_1 & (A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1 & (A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & (A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1 & (A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A-\lambda E)^2\boldsymbol{x}_1 & (A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，すなわち，

$P^{-1}(A-\lambda E)P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．これは (4.49) と同値である．

解 4.4　(1) と (2) の A は 1 個の固有値 $\lambda=1$（3 重解）のみをもつ．

(1) まず，固有値 $\lambda=1$ に対する A の固有空間 $W(1)$ を求める．同次連立 1 次方程式 $(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ において $\lambda=1$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-2x_3=0$ となり，$c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c_1, x_2=c_2$ とおくと，解は $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=0$ である．したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので，$W(1)=\left\{ c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, c_1,\ c_2 \in \mathbf{C} \right\}$ である．また，$\dim\bigl(W(1)\bigr)=2$ である．とくに，ベクトル $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda=1$ に対する A の固有ベクトルである．次に，連立 1 次方程式 $(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．すなわち，$2x_3=2$ より，$x_3=1$ である．とくに，ベクトル $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1 \notin W(1)$ となる解である．また，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_2 \in W(1)$ であり，$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立である．以上より，$P=\begin{pmatrix} (A-E)\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，P は正則となるので，逆行列 P^{-1} が存在する．さらに，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり，A のジョルダン標準形が得られる．

(2) まず，固有値 $\lambda=1$ に対する A の固有空間 $W(1)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ において $\lambda = 1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-2x_2 - 3x_3 = 0$，$-2x_3 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = 0$，$x_3 = 0$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので，$W(1) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{C} \right\}$ である．また, $\dim\bigl(W(1)\bigr) = 1$ である．とくに, ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 1$ に対する A の固有ベクトルである．次に, $(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．連立 1 次方程式 $(A - E)^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．すなわち，$4x_3 = 4$ より，$x_3 = 1$ である．とくに，ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1 \notin W(1)$ となる解である．また，$(A - E)\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．以上より，

$P = \begin{pmatrix} (A - E)^2\boldsymbol{x}_1 & (A - E)\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，P は正則となるので，逆行列 P^{-1} が存在する．さらに，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり，A のジョルダン標準形が得られる．

§5 の問題解答

解 5.1　(1) $W_1 + \cdots + W_m = \{\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m \mid \boldsymbol{x}_1 \in W_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_m \in W_m\}$ である．

(2) $\boldsymbol{x} \in W_1 + \cdots + W_m$ より，ある $\boldsymbol{x}_1 \in W_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m \in W_m$ が存在し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m$ となる．さらに，$j = 1, \cdots, m$ に対して，W_j は V の部分空間なので，$c\boldsymbol{x}_j \in W_j$ である．よって，$c\boldsymbol{x} = c(\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m) = c\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c\boldsymbol{x}_m \in W_1 + \cdots + W_m$，すなわち，$c\boldsymbol{x} \in W_1 + \cdots + W_m$ である．

解 5.2　$\boldsymbol{x} \in W_1 + \cdots + W_m$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \boldsymbol{y}_m$ ($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in W_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_m \in W_m$) と表されるとする．このとき，$W_1, \cdots, W_m$ は V の部分空間なので，$(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1) + \cdots + (\boldsymbol{x}_{m-1} - \boldsymbol{y}_{m-1}) = \boldsymbol{y}_m - \boldsymbol{x}_m \in (W_1 + \cdots + W_{m-1}) \cap W_m$ となる．ここで，定理 5.2 の (4) において，$j = m$ とすると，$\boldsymbol{y}_m - \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{y}_m$ である．よって，$\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_{m-1} = \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \boldsymbol{y}_{m-1}$ である．このとき，$(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1) + \cdots + (\boldsymbol{x}_{m-2} - \boldsymbol{y}_{m-2}) = \boldsymbol{y}_{m-1} - \boldsymbol{x}_{m-1} \in (W_1 + \cdots + W_{m-2}) \cap W_{m-1}$ となる．ここで，定理 5.2 の (4) において，$j = m - 1$ とすると，$\boldsymbol{y}_{m-1} - \boldsymbol{x}_{m-1} = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{x}_{m-1} = \boldsymbol{y}_{m-1}$ である．以下，同様の操作を行うと，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{y}_m$ となり，直和の定義（定義 5.1）より，定理 5.2 の (1) がなりたつ．

解 5.3　(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 + \cdots + W_m$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m$ ($\boldsymbol{x}_1 \in W_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m \in W_m$) と一意的に表されるとき，$W_1 + \cdots + W_m = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$ と表し，$W_1 + \cdots + W_m$ は $W_1, \cdots, W_m$ の直和であるという．

(2) j に関する数学的帰納法により示す．$j = 1$ のとき，(5.37) がなりたつことは明らかである．$j = k$ ($k = 1, \cdots, r-1$) のとき，(5.37) がなりたつと仮定する．$\boldsymbol{x}_1 \in W(\lambda_1) \setminus \{\boldsymbol{0}\}$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_{k+1} \in W(\lambda_{k+1}) \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ が 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \qquad (c_1, \cdots, c_{k+1} \in \mathbf{C}) \tag{$*$}$$

をみたすとする．$(*)$ の両辺に左から A をかけると，固有空間の定義 (1.21) より，

$$c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \tag{$**$}$$

となる．$(**) - (*) \times \lambda_{k+1}$ より，$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ である．ここで，帰納法の仮定と定理 5.2 の (1) $\Leftrightarrow$ (3) より，$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \cdots = c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$ となる．さらに，$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ は λ_{k+1} と異なるので，$c_1 = \cdots = c_k = 0$ である．これらを $(*)$ に代入すると，$c_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0}$ である．さらに，$\boldsymbol{x}_{k+1} \neq \boldsymbol{0}$ より，$c_{k+1} = 0$ となる．よって，$(*)$ は自明な 1 次関係となり，$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{k+1}$ は 1 次独立である．したがって，定理 5.2 の (1) $\Leftrightarrow$ (3) より，$j = k + 1$ のとき，(5.37) がなりたつ．以上より，任意の

$j=1,\cdots,r$ に対して，(5.37) がなりたつ．

§6 の問題解答

解 6.1　① $\mathbf{0}$，② $\langle \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_{d_k}\rangle_{\mathbf{C}}$，③ $\mathbf{0}$，④ 1 次独立

解 6.2　(1) 例 6.2 より，$(A^2)^3=O$ となり，A^2 はべき零行列である．よって，$A^6=O$ となり，A はべき零行列である．

(2) (1) および定理 6.2 より，$A^3=O$ である．よって，$A^4=A^3\cdot A=O$ となる．ここで，$A^4=(A^2)^2=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．よって，$ac=0$，すなわち，$a=0$ または $c=0$ である．

(3) まず，$A^2=\begin{pmatrix}p&q&r\\p&s&t\\0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}p(p+q)&q(p+s)&pr+qt\\p(p+s)&pq+s^2&pr+st\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．これを $A^2=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$ と比較すると，

$$p(p+q)=0,\quad p(p+s)=0,\quad pq+s^2=0 \qquad (*)$$

である．$(*)$ の第 1 式より，$p=0$ または「$p\neq 0$，$p+q=0$」である．$p=0$ のとき，$(*)$ の第 2 式がなりたつ．また，$(*)$ の第 3 式より，$s=0$ である．$p\neq 0$，$p+q=0$ のとき，$q=-p$ である．また，$(*)$ の第 2 式より，$s=-p$ である．このとき，$(*)$ の第 3 式がなりたつ．よって，A の成分がみたす条件は $p=s=0$ または $q=s=-p\neq 0$ である．

解 6.3　(1) $NP=N\begin{pmatrix}N\boldsymbol{x}_1&\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N^2\boldsymbol{x}_1&N\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O\boldsymbol{x}_1&N\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&N\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N\boldsymbol{x}_1&\boldsymbol{x}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ である．よって，$P^{-1}NP=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ である．

(2) $NP=N\begin{pmatrix}N\boldsymbol{x}_1&\boldsymbol{x}_1&\boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N^2\boldsymbol{x}_1&N\boldsymbol{x}_1&N\boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O\boldsymbol{x}_1&N\boldsymbol{x}_1&\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&N\boldsymbol{x}_1&\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N\boldsymbol{x}_1&\boldsymbol{x}_1&\boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．よって，

$P^{-1}NP=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．

(3) $NP = N\begin{pmatrix} N^2\boldsymbol{x}_1 & N\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^3\boldsymbol{x}_1 & N^2\boldsymbol{x}_1 & N\boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O\boldsymbol{x}_1 & N^2\boldsymbol{x}_1 & N\boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & N^2\boldsymbol{x}_1 & N\boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^2\boldsymbol{x}_1 & N\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

よって，$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

解 6.4　定理 6.3 の証明と同じ記号を用いる．また，$W_0 = \{\mathbf{0}\}$ と約束する．
定理 6.3 の証明（ステップ 3）において，$l = d_{j+1} + 1, \cdots, d_j$ なので，$J(0; j)$ の個数は $d_j - d_{j+1} \overset{(6.16)}{=} (\dim W_j - \dim W_{j-1}) - (\dim W_{j+1} - \dim W_j) = 2\dim W_j - \dim W_{j-1} - \dim W_{j+1} \overset{(6.14)}{=} 2(n - \operatorname{rank} N^j) - (n - \operatorname{rank} N^{j-1}) - (n - \operatorname{rank} N^{j+1}) = \operatorname{rank} N^{j-1} + \operatorname{rank} N^{j+1} - 2\operatorname{rank} N^j$ である．

§7 の問題解答

解 7.1　(1) $\tilde{W}(\lambda) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n \,\middle|\, \text{ある自然数 } j \text{ に対して，} (A - \lambda E)^j\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\}$ である．
(2) $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり，さらに，$j = 2, 3, \cdots$ とすると，$(A - \lambda E)^j = O$ となる．よって，$\tilde{W}(\lambda) = \mathbf{C}^2$ となる．

解 7.2　(1) ① $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，② $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，③ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

④ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，⑤ c（∵ 同次連立 1 次方程式 $(A - E)^j\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ において，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

とすると，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，$-x_1 + x_2 + 4jx_3 = 0$，$x_3 = 0$ となる．よって，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = c$，$x_3 = 0$ である），⑥ 0，⑦ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[⇨ 次のページに続きます]

(2) まず，$A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．よって，$(A-2E)^2=$ $\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．さらに，$(A-2E)^3=(A-2E)^2$ $(A-2E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=-(A-2E)^2$ である．したがって，$j=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ とすると，$(A-2E)^j=(-1)^j\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．ここで，同次連立1次方程式 $(A-2E)^j\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ において，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，$(-1)^j\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ より，$x_1=0$ となり，$c_1,\ c_2\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_2=c_1$，$x_3=c_2$ とおくと，解は $x_1=0$，$x_2=c_1$，$x_3=c_2$ である．以上より，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=$ $c_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ となり，$\tilde{W}(2)=\left\{c_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\,\middle|\,c_1,\ c_2\in\mathbf{C}\right\}$ である．

§8 の問題解答

解 8.1　(1) $A\in M_n(\mathbf{C})$ とすると，次の（ア）〜（エ）をみたす $S,\ N\in M_n(\mathbf{C})$ が存在する．（ア）$A=S+N$．（イ）S は対角化可能である．（ウ）N はべき零行列である．（エ）$SN=NS$．

(2) (1) において，S を A の半単純部分，N を A のべき零部分という．

(3) あたえられた行列を A とおき，A の半単純部分，べき零部分をそれぞれ $S,\ N$ とする．A は対角成分が 2 のみの上三角行列なので，1 個の固有値 2（4 重解）のみをもつことに注意する．

(a) A は1個の固有値2のみをもつので，例8.1より，$S=2E$, $N=A-2E=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

である．よって，A のジョルダン分解は $A = S + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

である．

(b) A は1個の固有値2のみをもつので，例8.1より，$S = 2E$, $N = A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

である．よって，A のジョルダン分解は $A = S + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

である．

解 8.2　(1) $(\ P \mid E\ )$ の行に関する基本変形を行うと，$(\ P \mid E\ ) =$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 3 行} \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行}]{\text{第 1 行} + \text{第 3 行} \times 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$ となる．よって，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

である．

(2) $P^{-1}AP \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 10 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となり，A のジョルダン標準形が得られる．

(3) S を A の半単純部分とする．(2) より，(8.2) において，$r=2$, $\lambda_1=2$, $m_1=2$, $\lambda_2=3$, $m_2=1$ とすると，$S \overset{\because (8.2)}{=} P\begin{pmatrix} \lambda_1 E_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 E_1 \end{pmatrix} P^{-1} \overset{\because (1)}{=}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ である．よって，N を A のべき零部分とすると，$N = A - S =$

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．したがって，A のジョルダン分解は $A = S + N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

解 8.3　(1) S, S' は対角化可能であり，かつ，可換なので，定理 3.3 より，ある正則な $P \in M_n(\mathbf{C})$ が存在し，$P^{-1}SP$，$P^{-1}S'P$ は対角行列となる．このとき，$P^{-1}(aS + bS')P = aP^{-1}SP + bP^{-1}S'P$ は対角行列となる．よって，$aS + bS'$ は対角化可能である．

(2) ① O，② $k + k'$，③ $N'N$，④ 二項

解 8.4　(1) ① λ，② $\lambda \boldsymbol{p}_1$ （$\because$ $AP = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ を計算する），③ $\boldsymbol{p}_1 + \lambda \boldsymbol{p}_2$，④ $\mu \boldsymbol{p}_3$，⑤ $\nu \boldsymbol{p}_4$，⑥ $\boldsymbol{p}_1$，⑦ $\boldsymbol{p}_3$，⑧ $\boldsymbol{p}_4$

(2) まず，固有値 $\lambda = 1$ に対する A の固有空間 $W(1)$ を求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = 1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とすると，$(E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ である．すなわち，

[⇨ 式変形とスペースの関係上，次のページに続きます]

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-x_2 = 0$，$-x_3 = 0$，$-x_3 - x_4 = 0$，$-2x_4 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = 0$，$x_3 = 0$，$x_4 = 0$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので，

$W(1) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{C} \right\}$ である．次に，固有値 $\lambda = 2$ に対する A の固有空間 $W(2)$ を求める．$(*)$ において $\lambda = 2$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とすると，$(2E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$x_1 - x_2 = 0$，$x_2 - x_3 = 0$，$-x_4 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = c$，$x_3 = c$，$x_4 = 0$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので，$W(2) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{C} \right\}$ である．さらに，固有値 $\lambda = 3$ に対する A の固有空間 $W(3)$ を求める．$(*)$ において $\lambda = 3$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とすると，$(3E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ で

ある．すなわち，$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$2x_1 - x_2 = 0$，$2x_2 - x_3 = 0$，$x_3 - x_4 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = 2c$，$x_3 = 4c$，$x_4 = 4c$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ 4c \\ 4c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ と表されるので，$W(3) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{C} \right\}$ である．以上より，$\dim\bigl(W(1)\bigr) + \dim\bigl(W(2)\bigr) + \dim\bigl(W(3)\bigr) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 4$ となるので，定理 1.6 より，A は対角化可能ではない．

(3) $\left(\, P \,\middle|\, E \, \right)$ の行に関する基本変形を行うと，$\left(\, P \,\middle|\, E \, \right) =$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 行} \times \frac{1}{4}]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行}\ \text{第 2 行} - \text{第 3 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 4 行} \times 4]{\text{第 1 行} + \text{第 4 行} \times 3\ \text{第 2 行} + \text{第 4 行} \times 2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$ となる．よって，P は正則であり，

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ である．

(4) $P^{-1}AP \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$

[⇨ 式変形とスペースの関係上，次のページに続きます]

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となり，A のジョルダン標準形が得られる．

(5) S を A の半単純部分とする．(4) より，(8.2) において，$r=3$, $\lambda_1=1$, $m_1=2$, $\lambda_2=2$, $m_2=1$，$\lambda_3=3$，$m_3=1$ とすると，$S \overset{\because (8.2)}{=} P \begin{pmatrix} \lambda_1 E_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 E_1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \lambda_3 E_1 \end{pmatrix} P^{-1} \overset{\because (3)}{=}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ である．よって，N を A のべき零部分とすると，$N = A - S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．したがって，A のジョルダン分解は $A = S + N =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

(6) まず，(2) より，$|A| = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \neq 0$ なので，A は正則である．次に，S, U をそれぞれ A の半単純部分，べき単部分とし，(5) で求めた S を用いて S^{-1} を求め，(8.17) を用いて U を求める．$(\ S \mid E\ )$ の行に関する基本変形を行うと，$(\ S \mid E\ ) =$

[⇨ 式変形とスペースの関係上，次のページに続きます]

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 行} \times \frac{1}{3}]{\text{第 3 行} \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 4 行} \times \frac{1}{2}]{\text{第 1 行} + \text{第 4 行},\ \text{第 2 行} + \text{第 4 行} \times \frac{1}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$ となる．よって，$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ である．

したがって，$U \overset{(8.17)}{=} S^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

§ 9 の問題解答

解 9.1　(1) $\boldsymbol{x} \in V$ とする．まず，$(p \circ q)(\boldsymbol{x}) \overset{\text{合成写像の定義}}{=} p\big(q(\boldsymbol{x})\big) \overset{q\text{ の定義}}{=} p\big(\boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x})\big) \overset{p\text{ は線形変換}}{=} p(\boldsymbol{x}) - p\big(p(\boldsymbol{x})\big) \overset{p\text{ は射影}}{=} p(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$(p \circ q)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である．よって，$p \circ q$ は零写像である．次に，$(q \circ p)(\boldsymbol{x}) \overset{\text{合成写像の定義}}{=} q\big(p(\boldsymbol{x})\big) \overset{q\text{ の定義}}{=} p(\boldsymbol{x}) - p\big(p(\boldsymbol{x})\big) \overset{p\text{ は射影}}{=} p(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$(q \circ p)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である．よって，$q \circ p$ は零写像である．

(2) $\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(q \circ q)(\boldsymbol{x}) \overset{\text{合成写像の定義}}{=} q\big(q(\boldsymbol{x})\big) \overset{q\text{ の定義}}{=} q\big(\boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x})\big) \overset{q\text{ は線形変換}}{=} q(\boldsymbol{x}) - q\big(p(\boldsymbol{x})\big) \overset{q \circ p\text{ は零写像}}{=} q(\boldsymbol{x})$ である．すなわち，$(q \circ q)(\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x})$ である．よって，$q \circ q = q$ となり，q は射影である．

(3) $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ および $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Im} q$ を示せばよい．

$\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$　$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} q$ とすると，像の定義より，ある $\boldsymbol{y} \in V$ が存在し，$\boldsymbol{x} = q(\boldsymbol{y})$ とな

る．このとき，$p(\boldsymbol{x}) = p\big(q(\boldsymbol{y})\big) \overset{\text{☺}\ p\circ q\text{は零写像}}{=} \boldsymbol{0}$ となる．すなわち，$p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である．よって，核の定義より，$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} p$ である．したがって，$\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ である．

$\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Im} q$　$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} p$ とすると，核の定義より，$p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である．このとき，$q(\boldsymbol{x}) \overset{\text{☺}\ q\text{の定義}}{=} \boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ となる．すなわち，$\boldsymbol{x} = q(\boldsymbol{x})$ である．よって，像の定義より，$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} q$ である．したがって，$\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Im} q$ である．

解 9.2　$\boldsymbol{x}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m \in W_m$ に対して，$\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0}$ であるとする．$j = 1, \cdots, m$ とすると，W_j の定義より，ある $\boldsymbol{y}_j \in V$ が存在し，$\boldsymbol{x}_j = p_j(\boldsymbol{y}_j)$ となる．これを上の式に代入すると，$p_1(\boldsymbol{y}_1) + \cdots + p_m(\boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{0}$ である．さらに，$k = 1, \cdots, m$ とすると，p_k は線形変換なので，$p_k(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である．よって，$(p_k \circ p_1)(\boldsymbol{y}_1) + \cdots + (p_k \circ p_m)(\boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{0}$ となる．さらに，(1) より，$p_k(\boldsymbol{y}_k) = \boldsymbol{0}$，すなわち，$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ となる．したがって，定理 5.2 の (1) $\Leftrightarrow$ (2) より，(9.4) の右辺は $W_1, \cdots, W_m$ の直和である

解 9.3　(1) S, N をそれぞれ A の半単純部分，べき零部分とする．S, N のすべての成分の共役をとることによって得られる行列を，それぞれ $\bar{S}$, $\bar{N}$ と表す．このとき，A が実行列であることより，$A = \bar{S} + \bar{N}$ となる．ここで，S は対角化可能なので，$\bar{S}$ は対角化可能となる．また，N はべき零行列なので，$\bar{N}$ はべき零行列となる．よって，$\bar{S}$, $\bar{N}$ はそれぞれ A の半単純部分，べき零部分である．したがって，ジョルダン分解の一意性（定理 9.5）より，$S = \bar{S}$，$N = \bar{N}$ となる．すなわち，A の半単純部分，べき零部分は実行列である．

(2) ① ジョルダン，② NS，③ 二項，④ S^k，⑤ O，⑥ 正則，⑦ $m - 1$

解 9.4　あたえられた行列を A とおく．

(1) A の固有値は $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$ なので，(9.32) より，A のスペクトル分解は $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = (1 + 2i)P_1 + (1 - 2i)P_2$ と表すことができる．ここで，定理 9.6 より，$P_1 = \dfrac{1}{(1+2i)-(1-2i)}\{A - (1 - 2i)E\} = \dfrac{1}{4i}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} - (1-2i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}i \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である．また，$P_2 = E - P_1$ (☺ **9・2** (2)′) $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4}i \\ -i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である．よって，A のスペクトル分解は $A = (1+2i)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}i \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (1-2i)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4}i \\ -i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である．

(2) A は対角成分が $1, i$ の上三角行列なので，A の固有値は $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ である（1 は 2 重解）．よって，(9.32) より，A のスペクトル分解は $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = P_1 + iP_2$ と表すことができる．ここで，定理 9.6 より，$P_1 = \dfrac{1}{1-i}(A - iE) = \dfrac{1}{1-i}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．また，$P_2 = E - P_1$（☺ 9・2 (2)′）$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．よって，A のスペクトル分解は $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

§10 の問題解答

解 10.1　まず，A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ である．よって，定理 10.2 より，最小多項式 $\psi_A(\lambda)$ は $\lambda-1$, $\lambda-2$, $(\lambda-1)(\lambda-2)$, $(\lambda-1)^2$, $\phi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ のいずれかである．ここで，A の定義より，

$A - E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$，$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq O$，$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ であり，$(A-E)(A-2E) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = O$ である．よって，$\psi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$ である．

解 10.2　固有多項式，最小多項式，固有空間，広義固有空間の記号については，§10 と同様のものを用いる．J を 4 次の正方行列のジョルダン標準形とする．

J が互いに異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbf{C}$ をもつ場合　J は $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ と表される．また，$\phi_J(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)$，$\psi_J(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)$，$\dim\bigl(W(\lambda_1)\bigr) = 1$，$\dim\bigl(W(\lambda_2)\bigr) = 1$，$\dim\bigl(W(\lambda_3)\bigr) = 1$，$\dim\bigl(W(\lambda_4)\bigr) = 1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right) = 1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_2)\right) = 1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_3)\right) = 1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_4)\right) = 1$ である．

J が互いに異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$ をもつ場合　λ_1 を 2 重解とすると，J は

[⇨ 式変形とスペースの関係上，次のページに続きます]

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ と表される．$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$，$\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$，$\dim\left(W(\lambda_1)\right) = 2$，$\dim\left(W(\lambda_2)\right) = 1$，$\dim\left(W(\lambda_3)\right) = 1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right) = 2$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_2)\right) = 1$, $\dim\left(\tilde{W}(\lambda_3)\right) = 1$ である．$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ のとき, $\phi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$, $\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$, $\dim\left(W(\lambda_1)\right) = 1$，$\dim\left(W(\lambda_2)\right) = 1$，$\dim\left(W(\lambda_3)\right) = 1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right) = 2$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_2)\right) = 1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_3)\right) = 1$ である．

J が異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ をもつ場合　λ_1, λ_2 は 2 重解であり，J は $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ のいずれかのように表されるか，または λ_1 は 3 重解であり，J は $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ のいずれかのように表される．$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)^2$，$\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$，$\dim\left(W(\lambda_1)\right) = 2$，$\dim\left(W(\lambda_2)\right) = 2$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right) = 2$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_2)\right) = 2$ である．$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)^2$，$\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)$，$\dim\left(W(\lambda_1)\right) = 1$，$\dim\left(W(\lambda_2)\right) = 2$，

$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right)=2, \dim\left(\tilde{W}(\lambda_2)\right)=2$ である．$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda)$ $=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)^2, \psi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)^2, \dim\bigl(W(\lambda_1)\bigr)=1, \dim\bigl(W(\lambda_2)\bigr)$ $=1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right)=2$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_2)\right)=2$ である．$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_2)$，$\psi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$，$\dim\bigl(W(\lambda_1)\bigr)=3$，$\dim\bigl(W(\lambda_2)\bigr)=1, \dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right)=3, \dim\left(\tilde{W}(\lambda_2)\right)=1$ である．$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_2)$，$\psi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)$，$\dim\bigl(W(\lambda_1)\bigr)=2$，$\dim\bigl(W(\lambda_2)\bigr)=1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right)=3$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_2)\right)=1$ である．$J=$ $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_2)$，$\psi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_2)$，$\dim\bigl(W(\lambda_1)\bigr)=1$，$\dim\bigl(W(\lambda_2)\bigr)=1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right)=3$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_2)\right)=1$ である．

J が 1 個の固有値 $\lambda_1\in\mathbf{C}$ のみをもつ場合　λ_1 は 4 重解であり，J は $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ のいずれかのように表される．$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ のとき，

$\phi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^4$，$\psi_J(\lambda)=\lambda-\lambda_1$，$\dim\bigl(W(\lambda_1)\bigr)=4$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right)=4$ である．

$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^4$，$\psi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2$，$\dim\bigl(W(\lambda_1)\bigr)=3$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right)=4$ である．$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^4$，$\psi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2$，$\dim\bigl(W(\lambda_1)\bigr)=2$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right)=4$ である．$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^4$，$\psi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3$，$\dim\bigl(W(\lambda_1)\bigr)=2$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right)=4$ である．$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ のとき，$\phi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^4$，$\psi_J(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^4$，$\dim\bigl(W(\lambda_1)\bigr)=1$，$\dim\left(\tilde{W}(\lambda_1)\right)=4$ である．

解 10.3　(1) $f,\ g\in V$，$c\in\mathbf{C}$ とする．まず，$n=1,\ 2$ のとき，$\bigl(T(f+g)\bigr)(n)\overset{\because\ T\text{の定義}}{=}(f+g)(3)+(f+g)(4)\overset{\because\ V\text{の和の定義}}{=}\bigl(f(3)+g(3)\bigr)+\bigl(f(4)+g(4)\bigr)=\bigl(f(3)+f(4)\bigr)+\bigl(g(3)+g(4)\bigr)\overset{\because\ T\text{の定義}}{=}\bigl(T(f)\bigr)(n)+\bigl(T(g)\bigr)(n)\overset{\because\ V\text{の和の定義}}{=}\bigl(T(f)+T(g)\bigr)(n)$ である．また，$n=3,\ 4$ のとき，$\bigl(T(f+g)\bigr)(n)\overset{\because\ T\text{の定義}}{=}(f+g)(1)+(f+g)(2)\overset{\because\ V\text{の和の定義}}{=}\bigl(f(1)+g(1)\bigr)+\bigl(f(2)+g(2)\bigr)=\bigl(f(1)+f(2)\bigr)+\bigl(g(1)+g(2)\bigr)\overset{\because\ T\text{の定義}}{=}\bigl(T(f)\bigr)(n)+\bigl(T(g)\bigr)(n)\overset{\because\ V\text{の和の定義}}{=}\bigl(T(f)+T(g)\bigr)(n)$ である．よって，$T(f+g)=T(f)+T(g)$ である．次に，$n=1,\ 2$ のとき，$\bigl(T(cf)\bigr)(n)\overset{\because\ T\text{の定義}}{=}(cf)(3)+(cf)(4)\overset{\because\ V\text{のスカラー倍の定義}}{=}c\cdot f(3)+c\cdot f(4)=c\bigl(f(3)+f(4)\bigr)\overset{\because\ T\text{の定義}}{=}c\bigl((Tf)(n)\bigr)\overset{\because\ V\text{のスカラー倍の定義}}{=}\bigl(c\cdot T(f)\bigr)(n)$ である．また，$n=3,\ 4$ のとき，$\bigl(T(cf)\bigr)(n)\overset{\because\ T\text{の定義}}{=}(cf)(1)+(cf)(2)\overset{\because\ V\text{のスカラー倍の定義}}{=}c\cdot f(1)+c\cdot f(2)=c\bigl(f(1)+f(2)\bigr)\overset{\because\ T\text{の定義}}{=}c\bigl((Tf)(n)\bigr)\overset{\because\ V\text{のスカラー倍の定義}}{=}\bigl(c\cdot T(f)\bigr)(n)$ である．よって，$T(cf)=c\cdot T(f)$ である．したがって，T は線形変換である．

(2) $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ が 1 次独立であることと V を生成することを示せばよい．

1 次独立であること　$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4 \in \mathbf{C}$ に対して，$c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 + c_4f_4 = \mathbf{0}$ とする．ただし，$\mathbf{0}$ は V の零ベクトルであり，1, 2, 3, 4 に対して $0 \in \mathbf{C}$ を対応させる関数を表す．このとき，$n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ とすると，$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ の定義より，$(c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 + c_4f_4)(n) = c_n$ となる．一方，$\mathbf{0}(n) = 0$ である．よって，$c_n = 0$ となるので，$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ は 1 次独立である．

V を生成すること　$f \in V$ とすると，$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ の定義より，

$$f = f(1)f_1 + f(2)f_2 + f(3)f_3 + f(4)f_4 \qquad (*)$$

となる．よって，$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ は V を生成する．

(3) まず，表現行列 A を求める．f_1 の定義より，$\big(T(f_1)\big)(1) = f_1(3) + f_1(4) = 0 + 0 = 0$，$\big(T(f_1)\big)(2) = f_1(3) + f_1(4) = 0 + 0 = 0$，$\big(T(f_1)\big)(3) = f_1(1) + f_1(2) = 1 + 0 = 1$，$\big((T(f_1)\big)(4) = f_1(1) + f_1(2) = 1 + 0 = 1$ である．よって，$(*)$ より，$T(f_1) = f_3 + f_4$ である．同様に，$T(f_2) = f_3 + f_4$，$T(f_3) = f_1 + f_2$，$T(f_4) = f_1 + f_2$ である（✍）．したがって，$\begin{pmatrix} T(f_1) & T(f_2) & T(f_3) & T(f_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 + f_4 & f_3 + f_4 & f_1 + f_2 & f_1 + f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので，$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．次に，A の固有値を求める．$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E_4 - A| = \begin{vmatrix} \lambda E_2 & -B \\ -B & \lambda E_2 \end{vmatrix} = |\lambda E_2 - B||\lambda E_2 + B|$（☺［藤岡 1］**例 8.3**）

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \left\{(\lambda - 1)^2 - (-1)^2\right\}\left\{(\lambda + 1)^2 - 1^2\right\}$$

$= \{(\lambda - 1) + 1\}\{(\lambda - 1) - 1\}\{(\lambda + 1) + 1\}\{(\lambda + 1) - 1\} = \lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2)$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda = 0,\ \pm 2$ である（0 は 2 重解）．さらに，$\lambda = 0$ が A の固有方程式の 2 重解であることに注意し，固有値 $\lambda = 0$ に対する固有空間 $W(0)$ を求める．同次連立 1 次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ において $\lambda = 0$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

とすると，$-A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-x_3 - x_4 = 0$，$-x_1 - x_2 = 0$ となり，$c_1,\, c_2 \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c_1$，$x_3 = c_2$ とおくと，解は $x_1 = c_1$，$x_2 = -c_1$，$x_3 = c_2$，$x_4 = -c_2$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$W(0) = \left\{ c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c_1,\, c_2 \in \mathbf{C} \right\}$ である．最後に，A の最小多項式 $\psi_A(\lambda)$ を求める．A は互いに異なる 3 個の固有値 $0,\, \pm 2$ をもち，0 は 2 重解である．さらに，$\dim\bigl(W(0)\bigr) = 2$ である．よって，問 10.2 より，$\psi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+2)(\lambda-2)$ である．

§11 の問題解答

解 11.1　$A^k \overset{(11.7),(*)}{=} P\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^k P^{-1} \overset{(11.12)}{=}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^k & {}_k\mathrm{C}_1 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1\cdot 3 - 1\cdot 2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^k & k\,3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^k & k\,3^{k-1} + 3^k \\ 2\cdot 3^k & 2k\,3^{k-1} + 3\cdot 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (3-2k)\,3^{k-1} & k\,3^{k-1} \\ -4k\,3^{k-1} & (3+2k)\,3^{k-1} \end{pmatrix}$$ である．

解 11.2　(1) A の固有値 λ は $\lambda = 1,\, 2$ なので，(9.31) より，A の一般スペクトル分解は

$$A = P_1 + 2P_2 + N \qquad (*)$$

と表される．ただし，$P_1,\, P_2$ は射影，N はべき零行列である．まず，$\dfrac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)^2} = \dfrac{a}{\lambda-1} + \dfrac{b\lambda + c}{(\lambda-2)^2}$ $(a,\, b,\, c \in \mathbf{C})$ とする．両辺に $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ をかけて整理すると，

$(a+b)\lambda^2+(-4a-b+c)\lambda+4a-c=1$ となる．よって，$a+b=0$，$-4a-b+c=0$，$4a-c=1$ である．これを解くと，$a=1$，$b=-1$，$c=3$ である．すなわち，$\dfrac{1}{\phi_A(\lambda)}=\dfrac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)^2}=\dfrac{1}{\lambda-1}+\dfrac{-\lambda+3}{(\lambda-2)^2}$ である．

(2) (1) および (9.13)，(9.15) より，$g_1(\lambda)=1$，$g_2(\lambda)=-\lambda+3$，$h_1(\lambda)=(\lambda-2)^2$，$h_2(\lambda)=\lambda-1$ とおくと，(9.21) より，$P_1=g_1(A)h_1(A)=(A-2E)^2$，$P_2=g_2(A)h_2(A)=(-A+3E)(A-E)$ である．よって，

$$P_1=(A-2E)^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$P_2=(-A+3E)(A-E)=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

である．さらに，$(*)$ より，

$$N=A-P_1-2P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

である．以上より，A の一般スペクトル分解は

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

である．

(3) $\phi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ および (11.24) より，$(A-E)P_1=O$，$(A-2E)^2P_2=O$ となる．よって，

$$A^k \overset{(11.23)}{=} 1^kP_1+2^kP_2+\sum_{l=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_l1^{k-l}(A-E)^lP_1+\sum_{l=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_l2^{k-l}(A-2E)^lP_2=1^kP_1+2^kP_2+\Big\{{}_k\mathrm{C}_11^{k-1}(A-E)P_1+{}_k\mathrm{C}_21^{k-2}(A-E)^2P_1+\cdots+{}_k\mathrm{C}_k1^0(A-E)^kP_1\Big\}+\Big\{{}_k\mathrm{C}_12^{k-1}(A-2E)P_2+{}_k\mathrm{C}_22^{k-2}(A-2E)^2P_2+\cdots+{}_k\mathrm{C}_k2^0(A-2E)^kP_2\Big\}=P_1+2^kP_2+(O+O+\cdots+O)+\Big\{k2^{k-1}(A-2E)P_2+O+\cdots+O\Big\}=P_1+2^kP_2+k2^{k-1}(A-2E)P_2 \overset{(2)}{=}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+2^k\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+k\,2^{k-1}\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^k & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} + k\,2^{k-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^k & 2^k & k\,2^{k+1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$ である．

解 11.3　まず，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$ $(k = 1,\, 2,\, \cdots)$ とおくと，$\boldsymbol{x}_k = A^{k-1}\boldsymbol{x}_1$ が得られる．ここで，A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 9 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-6) + 9 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$ である．よって，(11.34) において，$r = 1$，$m_1 = 2$，$\lambda_1 = 3$ とすると，$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項 x_k はある $\alpha,\, \beta \in \mathbf{C}$ を用いて，$x_k = \alpha\, 3^{k-1} + \beta \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_1 3^{k-2} = \alpha\, 3^{k-1} + \beta(k-1)3^{k-2}$ と表される．ここで，$x_1 = 1$，$x_2 = 2$ より，それぞれ $\alpha = 1$，$3\alpha + \beta = 2$ である．これを解くと，$\alpha = 1$，$\beta = -1$ である．よって，$x_k = 3^{k-1} + (1-k)3^{k-2}$ である．

§12 の問題解答

解 12.1　(1) ${}^tA = -A$ となる実正方行列 A のこと．

(2) $A\,{}^tA = {}^tAA = E$ となる実正方行列 A のこと．

(3) $A \in M_n(\mathbf{C})$ に対して，$\exp A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots$ を A の指数関数という．

(4) A を交代行列とすると，

$(\exp A)^t(\exp A) \overset{\text{定理 12.1 (3)}}{=} (\exp A)\big(\exp {}^tA\big) \overset{(1)}{=} (\exp A)\big(\exp(-A)\big) \overset{\text{定理 12.1 (2)}}{=} (\exp A)(\exp A)^{-1} = E$ である．よって，$(\exp A)$ ${}^t(\exp A) = E$ である．このとき，$(\exp A)^t(\exp A) = {}^t(\exp A)(\exp A) = E$ となり［⇨［藤岡 1］**定理 6.3**］，(2) より，$\exp A$ は直交行列である．

解 12.2　$\exp tA \overset{\text{定理 12.1 (5)}}{=} P\big(\exp(tP^{-1}AP)\big)P^{-1}$

$\overset{(*)}{=} P\left(\exp t\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)P^{-1}$

$\overset{(12.14)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{1\cdot 3 - 1\cdot 2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} e^{3t} & (t+1)e^{3t} \\ 2e^{3t} & (2t+3)e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{3t} & te^{3t} \\ -4te^{3t} & (1+2t)e^{3t} \end{pmatrix}$ である．

解 12.3　$\phi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$ より，(12.28) において，$r = 2$，$\lambda_1 = 1$，$k_1 = 1$，

$\lambda_2=2$, $k_2=2$ とすると，$\exp tA=e^t\sum_{k=0}^{1-1}t^k(A-E)^kP_1+e^{2t}\sum_{k=0}^{2-1}t^k(A-2E)^kP_2=$
$e^tP_1+e^{2t}P_2+e^{2t}t(A-2E)P_2=e^t\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+$
$te^{2t}\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}e^t&0&0\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&4te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}$ である．

解 12.4　(1) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\4&-4&-3&4\end{pmatrix}$ である．

(2) (12.36) より，A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ である．よって，(12.38) において，$r=3$，$m_1=1$，$\lambda_1=-1$，$m_2=1$，$\lambda_2=1$，$m_3=2$，$\lambda_3=2$ とすると，$(*)$ の解は α, β, γ, $\delta\in\mathbf{C}$ を用いて，$z(t)=\alpha e^{-t}+\beta e^t+\gamma e^{2t}+\delta te^{2t}$ と表される．

§13 の問題解答

解 13.1　$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^n$ とすると，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=x_1\overline{x_1}+\cdots+x_n\overline{x_n}=|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2\geq 0$ である．さらに，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=0$ とすると，$|x_1|^2=\cdots=|x_n|^2=0$ より，$x_1=\cdots=x_n=0$，すなわち，$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ である．よって，$\langle\ ,\ \rangle$ は正値性をみたす．

解 13.2　$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\overset{(13.14)}{=}\langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle+\langle\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle+\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle+\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle+\langle\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y}\rangle+\langle-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle+\langle-\boldsymbol{y},-\boldsymbol{y}\rangle$（∵ 半線形性（定義 13.1 (2)），定理 13.1 (1)）$=2\|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{y}\|^2$（∵ (13.14)，共役対称性（定義 13.1 (1)），定理 13.1 (2)）$=2\big(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2\big)$ である．よって，中線定理がなりたつ．

解 13.3　次の部分空間の条件 (1)〜(3) を示せばよい［⇨［藤岡 1］**定理 13.3**］．(1) $\mathbf{0}\in W^\perp$．(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2\in W^\perp$ ならば，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\in W^\perp$．(3) $c\in\mathbf{C}$，$\boldsymbol{x}\in W^\perp$ ならば，$c\boldsymbol{x}\in W^\perp$．

(1) $\boldsymbol{y} \in W$ とすると，$\langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ である［⇨**定理 13.1** (3)］．よって，$W^{\perp}$ の定義より，$\boldsymbol{0} \in W^{\perp}$ である．

(2) $\boldsymbol{y} \in W$ とすると，$\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle$（∵ 半線形性（定義 13.1 (2)）$= 0 + 0$（∵ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W^{\perp}$，$\boldsymbol{y} \in W$）$= 0$ である．すなわち，$\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ である．よって，$W^{\perp}$ の定義より，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W^{\perp}$ である．

(3) $\boldsymbol{y} \in W$ とすると，$\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = c\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$（∵ 半線形性（定義 13.1 (2)）$= c \cdot 0$（∵ $\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$，$\boldsymbol{y} \in W$）$= 0$ である．すなわち，$\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ である．よって，$W^{\perp}$ の定義より，$c\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ である．

§14 の問題解答

解 14.1　(1) $|\ \boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3\ | = \begin{vmatrix} i & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & i \end{vmatrix} = i \cdot i \cdot i + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot i \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot i - i \cdot 1 \cdot 1$（∵ サラスの方法）$= -i + 1 + 1 - i - i - i = 2 - 4i \neq 0$ である．

(2) グラム－シュミットの直交化法（定理 14.1）より，$\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\boldsymbol{a}_1 \overset{\because (13.14)}{=} \dfrac{1}{\sqrt{\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1 \rangle}}\boldsymbol{a}_1$

$$= \frac{1}{\sqrt{i \cdot \bar{i} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}'_2 = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} -$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left(1 \cdot \bar{i} + i \cdot 1 + 1 \cdot 1\right) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} -$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 - i \\ -1 + 3i \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}'_2\|}\boldsymbol{b}'_2 \overset{\because (13.14)}{=} \frac{1}{\sqrt{\langle \boldsymbol{b}'_2, \boldsymbol{b}'_2 \rangle}}\boldsymbol{b}'_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(3-i) \cdot \overline{(3-i)} + (-1+3i) \cdot \overline{(-1+3i)} + 2 \cdot 2}} \begin{pmatrix} 3-i \\ -1+3i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 3-i \\ -1+3i \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 - i \\ -1 + 3i \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}'_3 = \boldsymbol{a}_3 - \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1 \rangle \boldsymbol{b}_1 - \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2 \rangle \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} -$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3-i \\ -1+3i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3-i \\ -1+3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(1 \cdot \bar{i} + 1 \cdot 1 + i \cdot 1) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

$$\frac{1}{24}\left\{1 \cdot (\overline{3-i}) + 1 \cdot (\overline{-1+3i}) + i \cdot 2\right\} \begin{pmatrix} 3-i \\ -1+3i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

$$\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3-i \\ -1+3i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9-3i \\ 9-3i \\ -6+12i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ -2+4i \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_3'\|}\boldsymbol{b}_3' \overset{\because (13.14)}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\langle \boldsymbol{b}_3', \boldsymbol{b}_3' \rangle}}\boldsymbol{b}_3' = \frac{1}{\sqrt{(3-i)\cdot(\overline{3-i}) + (3-i)\cdot(\overline{3-i}) + (-2+4i)\cdot(\overline{-2+4i})}}$$

$\begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ -2+4i \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{40}} \begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ -2+4i \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ -2+4i \end{pmatrix}$ である．よって，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$

$= \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3-i \\ -1+3i \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ -2+4i \end{pmatrix} \right\}$ である．

解 14.2　まず，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ とすると，$\langle f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \rangle \overset{\because (13.1),(13.11)}{=} \langle f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \rangle - \langle f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}) \rangle - \langle f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y}) \rangle - \langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \rangle + \langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}) \rangle + \langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}) \rangle - \langle f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \rangle + \langle f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}) \rangle + \langle f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y}) \rangle \overset{\because f\text{ に対する仮定}}{=} \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$（$\because$ 半線形性（定義 13.1 (2)，定理 13.1 (1)，(2)）となる．すなわち，$\langle f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \rangle = 0$ である．よって，内積の正値性（定義 13.1 (3)）より，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$，すなわち，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ である．また，$c \in \mathbf{C}$，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$\langle f(c\boldsymbol{x}) - cf(\boldsymbol{x}), f(c\boldsymbol{x}) - cf(\boldsymbol{x}) \rangle \overset{\because (13.1),(13.11)}{=} \langle f(c\boldsymbol{x}), f(c\boldsymbol{x}) \rangle - \bar{c}\langle f(c\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}) \rangle - c\langle f(\boldsymbol{x}), f(c\boldsymbol{x}) \rangle + c\bar{c}\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}) \rangle \overset{\because f\text{ に対する仮定}}{=} \langle c\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{x} \rangle - \bar{c}\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - c\langle \boldsymbol{x}, c\boldsymbol{x} \rangle + c\bar{c}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$（$\because$ 半線形性（定義 13.1 (2)），定理 13.1 (2)）となる．すなわち，$\langle f(c\boldsymbol{x}) - cf(\boldsymbol{x}), f(c\boldsymbol{x}) - cf(\boldsymbol{x}) \rangle = 0$ である．よって，内積の正値性（定義 13.1 (3)）より，$f(c\boldsymbol{x}) - f(c\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$，すなわち，$f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$ である．したがって，f は線形変換である．

解 14.3　(1) $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{0}\| \overset{\because f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}}{=} \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0})\| \overset{\because f\text{ に対する仮定}}{=} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}\| =$

$\|\boldsymbol{x}\|$ である．すなわち，$\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ である．

(2) まず，$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 \overset{\because (13.14)}{=} \langle f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\rangle = \langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})\rangle - \langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\rangle - \langle f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})\rangle + \langle f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y})\rangle$ (∵ 半線形性（定義 13.1 (2)，定理 13.1 (2)）$= \|f(\boldsymbol{x})\|^2 - \langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\rangle - \overline{\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\rangle} + \|f(\boldsymbol{y})\|^2$ （∵ (13.14)，共役対称性（定義 13.1 (1)）$\overset{\because (1)}{=} \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2$ となる．すなわち，$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2$ である．同様に，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2$ である．ここで，f に対する仮定より，$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$ である．よって，$\mathrm{Re}\,\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\rangle = \mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ である．

(3) まず，f の定義より，$\langle f(z), f(w)\rangle = \langle i\bar{z}, i\bar{w}\rangle \overset{\because (13.2)}{=} i\bar{z}\cdot\overline{i\bar{w}} = \bar{z}w$ である．よって，$\mathrm{Im}\,\langle f(z), f(w)\rangle = \dfrac{\bar{z}w - \overline{\bar{z}w}}{2i} = \dfrac{\bar{z}w - z\bar{w}}{2i}$ である．一方，$\mathrm{Im}\,\langle z, w\rangle \overset{\because (13.2)}{=} \dfrac{z\bar{w} - \overline{z\bar{w}}}{2i} = \dfrac{z\bar{w} - \bar{z}w}{2i}$ である．よって，$\mathrm{Im}\,\langle f(z), f(w)\rangle + \mathrm{Im}\,\langle z, w\rangle = 0$ である．

解 14.4　標準エルミート内積の定義 (13.2) より，$\langle A^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = {}^t(A^*\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^t(A^*)\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^t\big({}^t(\overline{A})\big)\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{A}\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{A\boldsymbol{y}} = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle$ となる．よって，あたえられた等式がなりたつ．

解 14.5　X, Y の (j, k) 成分をそれぞれ x_{jk}, y_{jk} とすると，XY^* の (j, j) 成分は $\sum_{k=1}^{n} x_{jk}\overline{y_{jk}}$ であることに注意する．さらに，$Z \in M_{m,n}(\mathbf{C})$，$c \in \mathbf{C}$ とする．$\langle\ ,\ \rangle$ が定義 13.1 の共役対称性，半線形性，正値性をみたすことを示せばよい．

共役対称性　$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}\,(XY^*) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{jk}\overline{y_{jk}} = \overline{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\overline{x_{jk}}} = \overline{\mathrm{tr}\,(YX^*)} = \overline{\langle Y, X\rangle}$ である．よって，$\langle\ ,\ \rangle$ は共役対称性をみたす．

半線形性　まず，$\langle X + Y, Z\rangle = \mathrm{tr}\,\{(X + Y)Z^*\} = \mathrm{tr}\,(XZ^* + YZ^*) = \mathrm{tr}\,(XZ^*) + \mathrm{tr}\,(YZ^*) = \langle X, Z\rangle + \langle Y, Z\rangle$ である．また，$\langle X, cY\rangle = \mathrm{tr}\,\{X(cY)^*\} \overset{\because (14.19)\text{ 第 3 式}}{=} \mathrm{tr}\,\{X(\bar{c}Y^*)\} = \bar{c}\,\mathrm{tr}\,(XY^*) = \bar{c}\,\langle X, Y\rangle$ である．よって，$\langle\ ,\ \rangle$ は半線形性をみたす．

正値性　$\langle X, X\rangle = \mathrm{tr}\,(XX^*) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{jk}\overline{x_{jk}} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |x_{jk}|^2 \geq 0$ である．さらに，$\langle X, X\rangle = 0$ となるのは，任意の $j = 1, 2, \cdots, m$ および $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$x_{jk} = 0$，すなわち，$X = O$ のときである．よって，$\langle\ ,\ \rangle$ は正値性をみたす．

解 14.6　(1) $A \in \mathrm{U}(1)$ を $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = a$ $(a \in \mathbf{C})$ と表しておく．このとき，$AA^* = E$ [⇨(14.32)] より，$a\bar{a} = 1$ である．よって，$|a|^2 = 1$ となるので，$|a| = 1$ である．したがって，$\mathrm{U}(1)$ の元は絶対値が 1 の複素数である．

(2) $A \in \mathrm{U}(2)$ を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{C})$ と表しておく．このとき，$AA^* = E$ [⇨(14.32)] より，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，すなわち，$\begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって，

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad a\bar{c} + b\bar{d} = 0, \quad |c|^2 + |d|^2 = 1 \qquad (*)$$

である．$(*)$ の第 2 式より，ある $\lambda \in \mathbf{C}$ が存在し，$(\bar{c}, \bar{d}) = \bar{\lambda}(-b, a)$ となる．すなわち，$(c, d) = \lambda(-\bar{b}, \bar{a})$ である．これを，$(*)$ の第 3 式に代入すると，$|\lambda|^2(|b|^2 + |a|^2) = 1$ である．さらに，$(*)$ の第 1 式より，$|\lambda| = 1$ となる．したがって，A は $A = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ $(\lambda,\ a,\ b \in \mathbf{C},\ |\lambda| = 1,\ |a|^2 + |b|^2 = 1)$ と表される．

(3) $A,\ B \in \mathrm{U}(n)$ より，$AA^* = E$，$BB^* = E$ である [⇨(14.32)]．よって，$(AB)(AB)^* \overset{(14.19)\text{第 2 式}}{=} ABB^*A^* \overset{BB^*=E}{=} AEA^* = AA^* \overset{AA^*=E}{=} E$ である．すなわち，$(AB)(AB)^* = E$ である．したがって，$AB \in \mathrm{U}(n)$ である．

(4) $A \in \mathrm{U}(n)$ より，$AA^* = E$ である [⇨(14.32)]．よって，A は正則であり，$A^{-1} = A^*$ である．また，$(AA^*)^* = E^*$ となり，$(A^*)^*A^* = E$ である．したがって，$A^* \in \mathrm{U}(n)$ である．以上より，$A^{-1} \in \mathrm{U}(n)$ である．

§ 15 の問題解答

解 15.1　$AA^* = A^*A$ となる $A \in M_n(\mathbf{C})$ のこと．

解 15.2　(1) まず，$AA^* = \begin{pmatrix} ai & b \\ b & ai \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -ai & b \\ b & -ai \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$ である．また，$A^*A = \begin{pmatrix} -ai & b \\ b & -ai \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ai & b \\ b & ai \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$ である．よって，$AA^* = A^*A$ がなりたつので，A は正規行列である．

(2) A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - ai & -b \\ -b & \lambda - ai \end{vmatrix} = (\lambda - ai)^2 - b^2$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda = \pm b + ai$ である．

(3) まず，固有値 $\lambda = b + ai$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = b + ai$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，$\{(b+ai)E - A\}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$bx_1 - bx_2 = 0$，$-bx_1 + bx_2 = 0$ となり，$b \neq 0$ より，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = c$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$c = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = b + ai$ に対する A の固有ベクトルである．次に，固有値 $\lambda = -b + ai$ に対する A の固有ベクトルを求める．$(*)$ において $\lambda = -b + ai$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，$\{(-b+ai)E - A\}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} -b & -b \\ -b & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-bx_1 - bx_2 = 0$ となり，$b \neq 0$ より，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = -c$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$c = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = -b + ai$ に対する A の固有ベクトルである．上で得られたベクトル $\boldsymbol{q}_1$，$\boldsymbol{q}_2$ を正規化すると，$\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_1\|}\boldsymbol{q}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_2\|}\boldsymbol{q}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる．これらを並べたものと P とおくと，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ である．このとき，P はユニタリ行列なので，逆行列 P^{-1} をもつ．さらに，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} b+ai & 0 \\ 0 & -b+ai \end{pmatrix}$ となり，A は P によって対角化される．

解 15.3　(1) $AA^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ -i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ -i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = E$ である．よって，A はユニタリ行列である．

(2) A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & \lambda + \cos\theta \end{vmatrix} = \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = \lambda^2 - 1$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda = \pm 1$ である．

(3) まず，固有値 $\lambda = 1$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = 1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，$(E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 1 - \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & 1 + \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$(1 - \cos\theta)x_1 - i(\sin\theta)x_2 = 0$，$i(\sin\theta)x_1 + (1 + \cos\theta)x_2 = 0$ となり，$0 < \theta < 2\pi$，$\theta \neq \pi$ より，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，解は $x_1 = ci\sin\theta$，$x_2 = c(1 - \cos\theta)$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ci\sin\theta \\ c(1-\cos\theta) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} i\sin\theta \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix}$ と表されるので，$c = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} i\sin\theta \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 1$ に対する A の固有ベクトルである．次に，固有値 $\lambda = -1$ に対する A の固有ベクトルを求める．$(*)$ において $\lambda = -1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，$(-E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} -1 - \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -1 + \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$(-1 - \cos\theta)x_1 - i(\sin\theta)x_2 = 0$，$i(\sin\theta)x_1 + (-1 + \cos\theta)x_2 = 0$ となり，$0 < \theta < 2\pi$，$\theta \neq \pi$ より，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，解は $x_1 = -ci\sin\theta$，$x_2 = c(1 + \cos\theta)$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ci\sin\theta \\ c(1 + \cos\theta) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -i\sin\theta \\ 1 + \cos\theta \end{pmatrix}$ と表されるので，$c = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} -i\sin\theta \\ 1 + \cos\theta \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = -1$ に対する A の固有ベクトルである．上で得られたベクトル $\boldsymbol{q}_1$，$\boldsymbol{q}_2$ を正規化すると，$\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_1\|}\boldsymbol{q}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}\begin{pmatrix} i\sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_2\|}\boldsymbol{q}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2(1 + \cos\theta)}}\begin{pmatrix} -i\sin\theta \\ 1 + \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ となる．これらを並べたものと P とおくと，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ である．このとき，P はユ

ニタリ行列なので，逆行列 P^{-1} をもつ．さらに，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となり，A は P によって対角化される．

解 15.4　(1) $A^* = A$ となる $A \in M_n(\mathbf{C})$ のこと．

(2) ① λ，② $\bar{\lambda}$，③ A^*，④ A，⑤ $\mathbf{0}$，⑥ 0

(3) まず，A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -i \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ i & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} =$ $(\lambda-2)^2(\lambda-3) - (-i)\cdot i\cdot(\lambda-3)$（∵ サラスの方法）$= (\lambda-3)\{(\lambda-2)^2-1\} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda)=0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda = 1,\ 3$ である（3 は 2 重解）．次に，固有値 $\lambda = 1$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = 1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & -2 & 0 \\ i & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-x_1 - ix_3 = 0$，$-2x_2 = 0$，$ix_1 - x_3 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = 0$，$x_3 = ci$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ ci \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ と表されるので，$c = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 1$ に対する A の固有ベクトルである．さらに，$\boldsymbol{q}_1$ を正規化すると，$\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_1\|}\boldsymbol{q}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ となる．また，固有値 $\lambda = 3$ に対する A の固有ベクトルを求める．$(*)$ において $\lambda = 3$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(3E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ である．す

なわち，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$x_1 - ix_3 = 0$，$ix_1 + x_3 = 0$ となり，c_1，$c_2 \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c_1$，$x_2 = c_2$ とおくと，解は $x_1 = c_1$，$x_2 = c_2$，$x_3 = -c_1 i$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 i \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので，$c_1 = 1$，$c_2 = 0$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$，$c_1 = 0$，$c_2 = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 3$ に対する A の 1 次独立な固有ベクトルである．さらに，グラム – シュミットの直交化法（定理 14.1）より，$\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_2\|}\boldsymbol{q}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3' = \boldsymbol{q}_3 - \langle \boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{p}_2 \rangle \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{p}_3'\|}\boldsymbol{p}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる．以上より，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，P はユニタリ行列なので，逆行列 P^{-1} をもつ．さらに，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となり，A は P によって対角化される．

解 15.5　(1) $A^* = -A$ となる $A \in M_n(\mathbf{C})$ のこと．

(2) $A \in M_n(\mathbf{C})$ を歪エルミート行列，$\lambda \in \mathbf{C}$ を A の固有値，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ を固有値 λ に対する A の固有ベクトルとする．このとき，$\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x} \rangle = \bar{\lambda}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ となる．一方，$\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle \overset{\text{問 14.4}}{=} \langle A^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \overset{A^* = -A}{=} \langle -A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle -\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -\lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ である．よって，$(\lambda + \bar{\lambda})\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ である．ここで，固有ベクトルの定義より，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である．よって，エルミート内積の正値性（定義 13.1 (3)）より，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$ である．したがって，$\lambda + \bar{\lambda} = 0$ となる．すなわち，歪エルミート行列の固有値は純虚数である．

(3) まず，A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - i & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - i \end{vmatrix} = \lambda(\lambda -$

$i)^2+2(\lambda-i)$（∵ サラスの方法）$=(\lambda-i)\{\lambda(\lambda-i)+2\}=(\lambda+i)(\lambda-i)(\lambda-2i)$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda)=0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda=\pm i,\ 2i$ である．次に，固有値 $\lambda=-i$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda=-i$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，$(-iE-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix}-2i&-1&0\\1&-i&-1\\0&1&-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ である．よって，$-2ix_1-x_2=0,\ x_1-ix_2-x_3=0$，$x_2-2ix_3=0$ となり，$c\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c$ とおくと，解は $x_1=c$，$x_2=-2ci$，$x_3=-c$ である．したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\-2ci\\-c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\-2i\\-1\end{pmatrix}$ と表されるので，$c=1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}1\\-2i\\-1\end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda=-i$ に対する A の固有ベクトルである．さらに，$\boldsymbol{q}_1$ を正規化すると，$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_1\|}\boldsymbol{q}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2i\\-1\end{pmatrix}$ となる．また，固有値 $\lambda=i$ に対する A の固有ベクトルを求める．$(*)$ において $\lambda=i$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，$(iE-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&i&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ である．よって，$-x_2=0,\ x_1+ix_2-x_3=0,\ x_2=0$ となり，$c\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c$ とおくと，解は $x_1=c,\ x_2=0,\ x_3=c$ である．したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$c=1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda=i$ に対する A の固有ベクト

ルである．さらに，$\boldsymbol{q}_2$ を正規化すると，$\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_2\|}\boldsymbol{q}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ となる．最後に，固有値 $\lambda = 2i$ に対する A の固有ベクトルを求める．$(*)$ において $\lambda = 2i$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，$(2iE - A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \mathbf{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix}i & -1 & 0\\1 & 2i & -1\\0 & 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ である．よって，$ix_1 - x_2 = 0$，$x_1 + 2ix_2 - x_3 = 0$，$x_2 + ix_3 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = ic$，$x_3 = -c$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ic\\-c\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix}$ と表されるので，$c = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 2i$ に対する A の固有ベクトルである．さらに，$\boldsymbol{q}_3$ を正規化すると，$\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_3\|}\boldsymbol{q}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix}$ となる．以上より，$P = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}i & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}i\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ とおくと，P はユニタリ行列なので，逆行列 P^{-1} をもつ．さらに，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-i & 0 & 0\\0 & i & 0\\0 & 0 & 2i\end{pmatrix}$ となり，A は P によって対角化される．

§16 の問題解答

解 16.1　(1) $A^tA = {}^tAA$ となる $A \in M_n(\mathbf{R})$ のこと．

(2) A を実正規行列とし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbf{R}$ を A のすべての実数の固有値，$a_1 \pm b_1 i, \cdots, a_s \pm b_s i$ $(a_1, \cdots, a_s, b_1, \cdots, b_s \in \mathbf{R})$ を A のすべての実数ではない固有値とする．このとき，A に対する標準形は

[⇨ 式変形とスペースの関係上，次のページに続きます]

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \text{\Large 0} & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & a_1 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & & & & a_s & -b_s \\ & & & & & & b_s & a_s \end{pmatrix}$$

である［⇨(16.5)］.

解 16.2　(1) A の固有多項式は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3 + 1 + 1 - (\lambda-2) - (\lambda-2) - (\lambda-2)$ (∵ サラスの方法) $= (\lambda-2)^3 - 3(\lambda-2) + 2 = \{(\lambda-2)-1\}\{(\lambda-2)^2 + (\lambda-2) - 2\} = (\lambda-3)\{(\lambda-2)-1\}\{(\lambda-2)+2\} = \lambda(\lambda-3)^2$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda = 0, 3$ である（3 は 2 重解）.

(2) まず，固有値 $\lambda = 0$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = 0$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(0E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．ここで，係数行列の行に関する基本変形を行うと，$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行} + \text{第 3 行}]{\text{第 1 行} + \text{第 3 行} \times 2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行}}$

$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} \times \left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} + \text{第 1 行}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．よって，方程式に戻すと，$x_2 + x_3 = 0$，$x_1 - x_3 = 0$ である．したがって，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = -c$，$x_3 = c$ となる．以上より，

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\-c\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$c=1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda=0$ に対する A の固有ベクトルである．さらに，$\boldsymbol{q}_1$ を正規化すると，$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_1\|}\boldsymbol{q}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ となる．次に，固有値 $\lambda=3$ に対する A の固有ベクトルを求める．$(*)$ において $\lambda=3$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とすると，$(3E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ である．よって，$x_1-x_2+x_3=0$ となり，$c_1,\ c_2\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c_1$，$x_2=c_2$ とおくと，解は $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=-c_1+c_2$ である．したがって，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\-c_1+c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$c_1=1$，$c_2=0$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$c_1=0$，$c_2=1$ としたベクトル $\boldsymbol{q}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda=3$ に対する A の 1 次独立な固有ベクトルである．さらに，グラム－シュミットの直交化法（定理 14.1）より，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_2\|}\boldsymbol{q}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3'=\boldsymbol{q}_3-\langle\boldsymbol{q}_3,\boldsymbol{p}_2\rangle\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{p}_3'\|}\boldsymbol{p}_3'=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ となる．以上より，$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1&\boldsymbol{p}_2&\boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ とおくと，P は直交行列なので，逆行列 P^{-1} をもつ．さらに，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ と

なり，A は P によって対角化される．

解 16.3　(1) A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -3 \\ 0 & \lambda & -4 \\ 3 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 9\lambda + 16\lambda$（∵ サラスの方法）$= \lambda(\lambda^2 + 25)$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda = 0,\ \pm 5i$ である．

(2) まず，固有値 $\lambda = 0$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda = 0$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(0E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-3x_3 = 0$，$-4x_3 = 0$，$3x_1 + 4x_2 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，解は $x_1 = 4c$，$x_2 = -3c$，$x_3 = 0$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c \\ -3c \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので，$c = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{p}_1' = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 0$ に対する A の固有ベクトルである．次に，固有値 $\lambda = 5i$ に対する A の固有ベクトルを求める．$(*)$ において $\lambda = 5i$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(5iE - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 5i & 0 & -3 \\ 0 & 5i & -4 \\ 3 & 4 & 5i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

ここで，係数行列の行に関する基本変形を行うと，$\begin{pmatrix} 5i & 0 & -3 \\ 0 & 5i & -4 \\ 3 & 4 & 5i \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} + \text{第 1 行} \times \frac{3}{5}i} \begin{pmatrix} 5i & 0 & -3 \\ 0 & 5i & -4 \\ 0 & 4 & \frac{16}{5}i \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} + \text{第 2 行} \times \frac{4}{5}i} \begin{pmatrix} 5i & 0 & -3 \\ 0 & 5i & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．よって，方程式に戻すと，

$5ix_1 - 3x_3 = 0$，$5ix_2 - 4x_3 = 0$ である．したがって，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，解は $x_1 = 3ci$，$x_2 = 4ci$，$x_3 = -5c$ となる．以上より，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3ci \\ 4ci \\ -5c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3i \\ 4i \\ -5 \end{pmatrix}$ と表されるので，$c = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{u}_1' = \begin{pmatrix} 3i \\ 4i \\ -5 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 5i$ に対する A の固有ベクトルである．さらに，定理 16.1 より，ベクトル $\overline{\boldsymbol{u}_1'} = -\begin{pmatrix} 3i \\ 4i \\ 5 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = -5i$ に対する A の固有ベクトルである．

(3) まず，(2) で得られたベクトル $\boldsymbol{p}_1'$ を正規化すると，$\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{p}_1'\|} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．また，(2) で得られたベクトル $\boldsymbol{u}_1'$, $\overline{\boldsymbol{u}_1'}$ を正規化すると，$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}_1'\|}\boldsymbol{u}_1' = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3i \\ 4i \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overline{\boldsymbol{u}_1} = -\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3i \\ 4i \\ 5 \end{pmatrix}$ である．さらに，$\boldsymbol{q}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1 + \overline{\boldsymbol{u}_1})$, $\boldsymbol{q}_2 = \dfrac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1 - \overline{\boldsymbol{u}_1})$ とおくと，$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{q}_2 = -\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，P は直交行列なので，逆行列 P^{-1} をもつ．さらに，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ となり，A の標準形が得られる．

解 16.4　(1) $A^tA = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = E$ である．よって，A は直交行列である．

(2) A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda) = \dfrac{1}{3^3}|3\lambda E - 3A|$ である．ここで，$|3\lambda E - 3A| = \begin{vmatrix} 3\lambda - 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3\lambda + 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3\lambda - 1 \end{vmatrix} = (3\lambda - 1)^2(3\lambda + 1) - 8 - 8 - 4(3\lambda + 1) + 4(3\lambda - 1) +$

$4(3\lambda-1)$ (∵ サラスの方法) $=\left(9\lambda^2-1\right)(3\lambda-1)+12\lambda-28=9\left(3\lambda^3-\lambda^2+\lambda-3\right)=9(\lambda-1)\left(3\lambda^2+2\lambda+3\right)$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda)=0$ を解くと，A の固有値 λ は $\lambda=1,\ \dfrac{-1\pm 2\sqrt{2}i}{3}$ である．

(3) まず，固有値 $\lambda=1$ に対する A の固有ベクトルを求める．同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

において $\lambda=1$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ である．すなわち，

$(3E-3A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ より，$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．ここで，係数行列

の行に関する基本変形を行うと，$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行}-\text{第 1 行}]{\text{第 2 行}+\text{第 1 行}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行}\times\frac{1}{6}]{\text{第 1 行}\times\frac{1}{2}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行}-\text{第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．よって，方程式に戻すと，$x_1+x_3=0$，$x_2=0$ である．したがって，$c\in\mathbf{C}$ を任意の定数として，解は $x_1=c$，$x_2=0$，$x_3=-c$ となる．以上より，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$c=1$ とした

ベクトル $\boldsymbol{p}_1'=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda=1$ に対する A の固有ベクトルである．次に，固有値 $\lambda=\dfrac{-1+2\sqrt{2}i}{3}$ に対する A の固有ベクトルを求める．$(*)$ において $\lambda=\dfrac{-1+2\sqrt{2}i}{3}$ を代入し，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると，$\left(\dfrac{-1+2\sqrt{2}i}{3}E-A\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ である．すなわち，

$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2}i & 1 & 1 \\ -1 & \sqrt{2}i & -1 \\ 1 & 1 & -1+\sqrt{2}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．ここで，係数行列の行に関す

る基本変形を行うと，$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2}i & 1 & 1 \\ -1 & \sqrt{2}i & -1 \\ 1 & 1 & -1+\sqrt{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times(-1+\sqrt{2}i) \\ \text{第 2 行} + \text{第 3 行}}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2-\sqrt{2}i & 2+2\sqrt{2}i \\ 0 & 1+\sqrt{2}i & -2+\sqrt{2}i \\ 1 & 1 & -1+\sqrt{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{\text{第 1 行} \times \frac{1}{2-\sqrt{2}i} \\ \text{第 2 行} \times \frac{1}{1+\sqrt{2}i}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2}i \\ 0 & 1 & \sqrt{2}i \\ 1 & 1 & -1+\sqrt{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \\ \text{第 3 行} - \text{第 1 行}}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．よって，方程式に戻すと，$x_2+\sqrt{2}ix_3=0$，$x_1-x_3=0$ である．したがって，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1=c$ とおくと，解は $x_1=c$，$x_2=-\sqrt{2}ci$，$x_3=c$ となる．以上より，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ -\sqrt{2}ci \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$c=1$ としたベクトル $\boldsymbol{u}_1'=\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda=\dfrac{-1+2\sqrt{2}i}{3}$ に対する A の固有ベクトルである．さらに，定理 16.1 より，ベクトル $\overline{\boldsymbol{u}_1'}=\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda=\dfrac{-1-2\sqrt{2}i}{3}$ に対する A の固有ベクトルである．

(4) まず，(3) で得られたベクトル $\boldsymbol{p}_1'$ を正規化すると，$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{p}_1'\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．また，(3) で得られたベクトル $\boldsymbol{u}_1'$，$\overline{\boldsymbol{u}_1'}$ を正規化すると，$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}_1'\|}\boldsymbol{u}_1'=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$，$\overline{\boldsymbol{u}_1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ である．さらに，$\boldsymbol{q}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1+\overline{\boldsymbol{u}_1})$，$\boldsymbol{q}_2=\dfrac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1-\overline{\boldsymbol{u}_1})$ とおくと，$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$P=(\ \boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2\ )=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ とお

くと, P は直交行列なので, 逆行列 P^{-1} をもつ．さらに, $P^{-1}AP = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ となり，A の標準形が得られる．

§17 の問題解答

解 17.1　十分性の仮定，すなわち，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ であることより，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ とすると，$0 = b(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$（∵ 双 1 次形式の定義（定義 17.1））$= 0 + b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + 0 = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ となる．すなわち，$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ である．よって，b は交代形式である．

解 17.2　(17.13), (17.14) より，$A_s = \dfrac{1}{2}\big(A + {}^tA\big)$，$A_a = \dfrac{1}{2}\big(A - {}^tA\big)$ とおくと，b_A の対称部分，交代部分はそれぞれ b_{A_s}, b_{A_a} である．

(1) まず，$A_s = \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$A_a = \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right)$ $= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ である．ここで，A_s の固有多項式 $\phi_{A_s}(\lambda)$ は $\phi_{A_s}(\lambda) = |\lambda E - A_s| =$ $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - (-2)\cdot(-2) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3)$ である．よって，固有方程式 $\phi_{A_s}(\lambda) = 0$ を解くと，A_s の固有値は $\lambda = -1, 3$ となり，A_s の固有値は正のもの 1 個と負のもの 1 個からなる．したがって，b_A の対称部分 b_{A_s} の符号数は $(1, 1)$ である．また，A_a は正則となるので，b_A の交代部分 b_{A_a} の階数は $\operatorname{rank} A_a = 2$ である．

(2) まず，$A_s = \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$A_a =$ $\dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ である．ここで，A_s の固有多項式 $\phi_{A_s}(\lambda)$ は $\phi_{A_s}(\lambda) = |\lambda E - A_s| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2) -$ $(\lambda - 2)$（∵ サラスの方法）$= (\lambda-2)\big(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1\big) = \lambda(\lambda-2)^2$ である．よって，

固有方程式 $\phi_{A_s}(\lambda)=0$ を解くと，A_s の固有値は $\lambda=0,\,2$ となり，$\lambda=2$ が固有方程式の 2 重解であることに注意すると，A_s の固有値は正のもの 2 個と 1 個の 0 からなり，負のものは 0 個である．したがって，b_A の対称部分 b_{A_s} の符号数は $(2,0)$ である．また，A_a の階数は 2 となるので，b_A の交代部分 b_{A_a} の階数は $\operatorname{rank} A_a=2$ である．

§18 の問題解答

解 18.1　(18.6) および例 18.3 をもとに考える．

(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，符号数 $(2,1)$，階数 3 である．

(2) $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，符号数 $(0,2)$，階数 2 である．

解 18.2　(1) $\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}',\,\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{y}'\in V,\ c\in\mathbf{R}$ とすると，$b(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})=b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+b(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})$，$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}')=b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}')$，$b(c\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=b(\boldsymbol{x},c\boldsymbol{y})=cb(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ である．

(2) 任意の $\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}\in V$ に対して，$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=b(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ がなりたつこと．

(3) 任意の $\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}\in V$ に対して，$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-b(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ がなりたつこと．

(4) $q(\boldsymbol{x})=b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x}\in V)$ により定められる実数値関数 $q:V\to\mathbf{R}$ のこと．

(5) 任意の $\boldsymbol{x}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ に対して，$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ となること．

(6) 任意の $\boldsymbol{x}\in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ に対して，$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})<0$ となること．

解 18.3　$A\in M_n(\mathbf{R})$ を対称行列とし，A の (i,j) 成分を a_{ij} とおく．このとき，$D_k=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}$ $(k=1,\,2,\,\cdots,\,n)$ とおき，D_k を A の k 次の主小行列式という [⇨(18.15)]．

解 18.4　(1) $k=1,\,2,\,3$ とし，D_k を A の k 次の主小行列式とすると，$D_1=a$，$D_2=\begin{vmatrix}a&2\\2&a\end{vmatrix}=a^2-4$，$D_3=\begin{vmatrix}a&2&1\\2&a&0\\1&0&a\end{vmatrix}=a^3-a-4a$（∵ サラスの方法）$=a\bigl(a^2-5\bigr)$ である．

(2) 定理 18.4 の (1) より，$D_1>0$，$D_2>0$，$D_3>0$ を解く．求める条件は $a>\sqrt{5}$ で

ある．

(3) 定理 18.4 の (2) より，$D_1 < 0$，$D_2 > 0$，$D_3 < 0$ を解く．求める条件は $a < -\sqrt{5}$ である．

解 18.5　$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，A は対称行列であり，$q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ となる．ここで，A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は $\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -a \\ -a & \lambda-1 & -a \\ -a & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 - a^3 - a^3 - a^2(\lambda-1) - a^2(\lambda-1) - a^2(\lambda-1)$ (∵ サラスの方法) $= (\lambda-1)^3 - 3a^2(\lambda-1) - 2a^3 = \{(\lambda-1)+a\}\{(\lambda-1)^2 - a(\lambda-1) - 2a^2\} = (\lambda-1+a)^2(\lambda-1-2a)$ である．よって，固有方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ を解くと，A の固有値は $\lambda = 1-a,\ 1+2a$ である．$\lambda = 1-a$ が固有方程式の 2 重解であることに注意すると，求める条件は $1+2a > 0$，$1-a < 0$ より，$a > 1$ である．

解 18.6　① $a_{11}x_1^2$，② a_{11}，③ 対称，④ a_{11} (∵ $\left(\sum_{i=1}^{l+1} a_{1i}x_i\right)^2 + q_B(\boldsymbol{x}') = \sum_{i,j=1}^{l+1} a_{1i}a_{1j}x_ix_j + q_B(\boldsymbol{x}') = a_{11}^2x_1^2 + \sum_{i=2}^{l+1} a_{1i}a_{11}x_ix_1 + \sum_{j=2}^{l+1} a_{11}a_{1j}x_1x_j + \sum_{i,j=2}^{l+1} a_{1i}a_{1j}x_ix_j + \sum_{i,j=2}^{l+1} (a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j})x_ix_j = a_{11}q_A(\boldsymbol{x})$)，⑤ a_{11}^k (∵ $a_{11}^k D_{k+1} = a_{11}^k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k+1} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & \cdots & a_{11}a_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}a_{k+1,1} & a_{11}a_{k+1,2} & \cdots & a_{11}a_{k+1,k+1} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k+1} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{k+1,2} & \cdots & b_{k+1,k+1} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k+1,2} & \cdots & b_{k+1,k+1} \end{vmatrix} = a_{11}D'_k$$

)，⑥ 0

§19 の問題解答

解 19.1　(1) 与式を変形すると，$ax^2 + bx - y + c = 0$ である．よって，$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である．

(2) 与式を変形すると，$-xy + c = 0$ である．よって，$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である．

解 19.2　① $\theta - \varphi$，② 鏡映，③ 超平面，④ n

解 19.3　$\mathrm{O} = \boldsymbol{0}$，$A = f(\boldsymbol{0})$ とおき，M を線分 OA の中点とすると，$\mathrm{M} = \frac{1}{2}f(\boldsymbol{0})$ である．さらに，M を通り，線分 OA と直交する超平面に関する鏡映を g とする．このとき，鏡映の定義より，g は A を O へ写す．すなわち，$g\big(f(\boldsymbol{0})\big) = \boldsymbol{0}$ である．よって，$(g \circ f)(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である．

解 19.4　直交行列 $P \in M_n(\mathbf{R})$ および $\boldsymbol{q} \in \mathbf{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} + \boldsymbol{q}$ を (19.6) に代入すると，(19.32) が得られる．すなわち，${}^t\boldsymbol{y}\big({}^tPAP\big)\boldsymbol{y} + 2{}^t(A\boldsymbol{q} + \boldsymbol{b})P\boldsymbol{y} + {}^t\boldsymbol{q}A\boldsymbol{q} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c = 0$ である．仮定より，A は正則なので，A^{-1} が存在し，$\boldsymbol{q} = -A^{-1}\boldsymbol{b}$ とすると，$A\boldsymbol{q} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となる．さらに，定理 16.3 より，P を ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となるように選んでおくことができる．このとき，(19.32) は $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + {}^t\boldsymbol{q}A\boldsymbol{q} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c = 0$ となる．ここで，$\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A\boldsymbol{q} + \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{b} & {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c \end{pmatrix}$ ($\because$ $A\boldsymbol{q} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$)，すなわち，$\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{b} & {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c \end{pmatrix}$ となる．よって，両辺の行列式を取ると，行列式の性質より，$|\tilde{A}| = |A|\big({}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c\big)$ である．さらに，A は正則なので，$|A| \neq 0$ であり，${}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c = \frac{|\tilde{A}|}{|A|}$ となる．したがって，${}^t\boldsymbol{q}A\boldsymbol{q} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c \overset{{}^tA = A}{=} {}^t(A\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c = {}^t(-\boldsymbol{b})\boldsymbol{q} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c$ ($\because$ $A\boldsymbol{q} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$) $= {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c = \frac{|\tilde{A}|}{|A|}$ となる．すなわち，${}^t\boldsymbol{q}A\boldsymbol{q} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + c = \frac{|\tilde{A}|}{|A|}$ である．以上より，題意の式が得られる．

§ 20 の問題解答

解 20.1　(20.1) において，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$c = 5$ とすると，あたえられた 2 次曲線が得られる．ここで，$A\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とすると，$q_1 + 2q_2 - 3 = 0$

である．よって，$c \in \mathbf{R}$ を任意の定数として，$q_1 = -2c + 3$，$q_2 = c$ である．したがって，中心 $\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c+3 \\ c \end{pmatrix}$ である．

補足　問 20.1 の 2 次曲線は $(x + 2y - 3)^2 = 4$ と同値である．さらに，この 2 次曲線は平行な 2 直線 $x + 2y - 5 = 0$，$x + 2y - 1 = 0$ を表す．

解 20.2　① d，② $r + 1$，③ r，④ n，⑤ $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$，⑥ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, d$

解 20.3　① p, ② $r + 2$, ③ $n - 1$, ④ $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2$, ⑤ x_n, ⑥ $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$

解 20.4　(1) まず，問 20.2 より，固有な有心 2 次曲線の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + d = 0 \qquad (*)$$

と表される．ただし，$\lambda, \mu, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である．λ, μ, d の符号がすべて同じとき，$(*)$ をみたす $x, y \in \mathbf{R}$ は存在しない．すなわち，$(*)$ は空集合を表す．λ, μ の符号が同じであり，d の符号が λ, μ の符号と異なるとき，$(*)$ は楕円を表す．λ, μ の符号が異なるとき，$(*)$ は双曲線を表す．次に，問 20.3 より，固有な無心 2 次曲線の標準形は $\lambda x^2 + 2py = 0$ と表される．ただし，$\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$，$p > 0$ である．これは放物線を表す．よって，固有 2 次曲線は空集合，楕円，双曲線，放物線のいずれかである．

(2) 問 20.2，問 20.3 より，固有でない 2 次曲線の標準形は

$$\lambda x^2 + \mu y^2 = 0 \qquad (\lambda, \mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}) \qquad \text{(a)}$$

または

$$\lambda x^2 + d = 0 \qquad (\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\},\ d \in \mathbf{R}) \qquad \text{(b)}$$

と表される．とくに，これらは有心である．(a) において，λ, μ の符号が同じとき，(a) は原点を表す．(a) において，λ, μ の符号が異なるとき，(a) は原点で交わる 2 直線を表す．(b) において，$d \neq 0$ であり，λ, d の符号が同じとき，(b) は空集合を表す．(b) において，$d \neq 0$ であり，λ, d の符号が異なるとき，(b) は平行な 2 直線を表す．(b) において，$d = 0$ のとき，(b) は重なった 2 直線を表す．よって，固有でない 2 次曲線は有心であり，空集合，1 点，交わる 2 直線，平行な 2 直線，重なった 2 直線のいずれかである．

解 20.5　① 空，② 楕円，③ 二葉双曲，④ 一葉双曲，⑤ 楕円放物，⑥ 双曲放物

§ 21 の問題解答

解 21.1　1 次形式の定義より，cf が線形写像の条件をみたすことを確かめればよい．すなわち，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ および任意の $d \in \mathbf{R}$ に対して，

$$(cf)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (cf)(\boldsymbol{x}) + (cf)(\boldsymbol{y}), \qquad (cf)(d\boldsymbol{x}) = d(cf)(\boldsymbol{x}) \qquad (*)$$

がなりたつことを示せばよい．まず，$(cf)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = cf(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = c\big(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})\big)$ （$\because$ f は線形写像）$= cf(\boldsymbol{x}) + cf(\boldsymbol{y}) = (cf)(\boldsymbol{x}) + (cf)(\boldsymbol{y})$ である．よって，$(*)$ の第 1 式がなりたつ．次に，$(cf)(d\boldsymbol{x}) = cf(d\boldsymbol{x}) = c\big(df(\boldsymbol{x})\big)$ （$\because$ f は線形写像）$= d\big(cf(\boldsymbol{x})\big) = d(cf)(\boldsymbol{x})$ である．よって，$(*)$ の第 2 式がなりたつ．

解 21.2　双対基底の定義より，$i, j = 1, 2$ に対して，$f_i(\boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ である．よって，$1 = f_1(\boldsymbol{a}_1) = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$，$0 = f_1(\boldsymbol{a}_2) = a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b$，$0 = f_2(\boldsymbol{a}_1) = c \cdot 1 + d \cdot 0 = c$，$1 = f_2(\boldsymbol{a}_2) = c \cdot 1 + d \cdot 1 = c + d$ である．これらより，$a = 1$，$b = -1$，$c = 0$，$d = 1$ である．

解 21.3　(1) 次の部分空間の条件 (a)〜(c) を示せばよい［⇨［藤岡 1］**定理 13.3**］．(a) $\mathbf{0}_{V^*} \in A^\perp$．(b) $f, g \in A^\perp$ ならば，$f + g \in A^\perp$．(c) $c \in \mathbf{R}$，$f \in A^\perp$ ならば，$cf \in A^\perp$．
(a) $\mathbf{0}_{V^*}$ は零写像なので，とくに，任意の $\boldsymbol{x} \in A$ に対して，$\mathbf{0}_{V^*}(\boldsymbol{x}) = 0$ である．よって，$\mathbf{0}_{V^*} \in A^\perp$ である．(b) $f, g \in A^\perp$ とすると，任意の $\boldsymbol{x} \in A$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = 0$，$g(\boldsymbol{x}) = 0$ である．よって，任意の $\boldsymbol{x} \in A$ に対して，$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) = 0 + 0 = 0$ である．したがって，$f + g \in A^\perp$ である．(c) $f \in A^\perp$ とすると，任意の $\boldsymbol{x} \in A$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = 0$ である．よって，任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $\boldsymbol{x} \in A$ に対して，$(cf)(\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}) = c \cdot 0 = 0$ である．したがって，$cf \in A^\perp$ である．
(2) $f \in B^\perp$ とすると，任意の $\boldsymbol{x} \in B$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = 0$ である．ここで，$\boldsymbol{x} \in A$ とすると，$A \subset B$ より，$\boldsymbol{x} \in B$ である．よって，$f(\boldsymbol{x}) = 0$ である．したがって，$f \in A^\perp$ である．以上より，$B^\perp \subset A^\perp$ である．
(3) まず，$W_1 \subset W_1 + W_2$ なので，(2) より，$(W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp$ である．同様に，$(W_1 + W_2)^\perp \subset W_2^\perp$ である．よって，$(W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp$ である．次に，$f \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$ とする．このとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W_1 + W_2$ $(\boldsymbol{x}_1 \in W_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_2)$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2)$ （$\because$ f は線形写像）$= 0 + 0$ （$\because$ $f \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$）$= 0$ である．よって，$f \in (W_1 + W_2)^\perp$ である．したがって，$W_1^\perp \cap W_2^\perp \subset (W_1 + W_2)^\perp$ である．以上より，$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ である．
(4) $\dim W = 0$ のとき　$W = \{\mathbf{0}\}$ である．よって，任意の線形写像は零ベクトルを零ベクトルへ写すことより，$W^\perp = V^*$ である．したがって，$\dim W^\perp = \dim V^* \overset{\because\ (21.9)}{=} \dim V$ となり，題意の等式がなりたつ．
$\dim W = \dim V$ のとき　$W = V$ である．よって，零写像の定義より，$W^\perp = \{\mathbf{0}_{V^*}\}$ で

ある．したがって，$\dim W^{\perp}=0$ となり，題意の等式がなりたつ．

$0<\dim W<\dim V$ のとき　W の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m\}$ を選んでおく．ただし，$0<m<\dim V$ である．次に，$\boldsymbol{a}_{m+1},\,\boldsymbol{a}_{m+2},\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_n\in V$ を $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ が V の基底となるように選んでおく．さらに，$\{f_1,\,f_2,\,\cdots,\,f_n\}$ を $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ の双対基底とする．とくに，$f_{m+1},\,f_{m+2},\,\cdots,\,f_n$ は 1 次独立である．また，双対基底の定義より，$i=m+1,\,m+2,\cdots,\,n$，$j=1,\,2,\,\cdots,\,m$ とすると，$f_i(\boldsymbol{a}_j)=0$ である．よって，$\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m\}$ が W の基底であることより，$f_{m+1},\,f_{m+2},\,\cdots,\,f_n\in W^{\perp}$ となる．ここで，$f\in W^{\perp}$ とすると，$\{f_1,\,f_2,\,\cdots,\,f_n\}$ は V^* の基底なので，ある $c_1,\,c_2,\,\cdots,\,c_n\in\mathbf{R}$ が存在し，$f=c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n$ となる．このとき，$i=1,\,2,\,\cdots,\,m$ とすると，$\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m\}$ が W の基底であることと双対基底の定義より，$0=f(\boldsymbol{a}_i)=(c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n)(\boldsymbol{a}_i)=c_i$ となる．したがって，$f=c_{m+1}f_{m+1}+c_{m+2}f_{m+2}+\cdots+c_nf_n$ となり，$W^{\perp}$ は $f_{m+1},\,f_{m+2},\,\cdots,\,f_n$ で生成される．以上より，$\{f_{m+1},\,f_{m+2},\,\cdots,\,f_n\}$ は $W^{\perp}$ の基底であり，$\dim W^{\perp}=n-m=\dim V-\dim W$ となる．

§22 の問題解答

解 22.1　推移律　$(m,n),\,(m',n'),\,(m'',n'')\in X$，$(m,n)\sim(m',n')$，$(m',n')\sim(m'',n'')$ とする．このとき，$\sim$ の定義より，

$$mn'=nm',\qquad m'n''=n'm''\tag{$*$}$$

である．$(*)$ の 2 式をかけると，$mn'm'n''=nm'n'm''$ である．ここで，$n'\neq 0$ なので，$mm'n''=nm'm''$ である．$m'\neq 0$ のとき，$mn''=nm''$ である．$m'=0$ のとき，$(*)$ および $n'\neq 0$ より，$m=m''=0$ となるので，$mn''=nm''$ である．よって，$\sim$ の定義より，$(m,n)\sim(m'',n'')$ である．したがって，$\sim$ は推移律をみたす．

解 22.2　(1) ① $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$，② $\sim$，③ $f(\boldsymbol{x})$

(2) $\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}\in V$ とすると，$[f]\big([\boldsymbol{x}]+[\boldsymbol{y}]\big)=[f]\big([\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}]\big)$（$\because$ V/W の和の定義）$=\big[f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\big]$（$\because$ $[f]$ の定義）$=\big[f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})\big]$（$\because$ f は線形写像）$=\big[f(\boldsymbol{x})\big]+\big[f(\boldsymbol{y})\big]$（$\because$ V'/W' の和の定義）$=[f]\big([\boldsymbol{x}]\big)+[f]\big([\boldsymbol{y}]\big)$（$\because$ $[f]$ の定義）である．また，$\boldsymbol{x}\in V$，$c\in\mathbf{R}$ とすると，$[f]\big(c[\boldsymbol{x}]\big)=[f]\big([c\boldsymbol{x}]\big)$（$\because$ V/W のスカラー倍の定義）$=\big[f(c\boldsymbol{x})\big]$（$\because$ $[f]$ の定義）$=\big[cf(\boldsymbol{x})\big]$（$\because$ f は線形写像）$=c\big[f(\boldsymbol{x})\big]$（$\because$ V'/W' のスカラー倍の定義）$=c[f]\big([\boldsymbol{x}]\big)$（$\because$ $[f]$ の定義）である．よって，$[f]$ は線形写像である．

(3) まず，表現行列 B の (i,j) 成分を b_{ij} とすると，表現行列の定義より，$j=1,\,\cdots,\,l$

のとき，$f|_W(\boldsymbol{a}_j)=\sum_{i=1}^{k} b_{ij}\boldsymbol{b}_i$ である．よって，$f|_W$ の定義より，$j=1,\cdots,l$ のとき，$f(\boldsymbol{a}_j)=\sum_{i=1}^{k} b_{ij}\boldsymbol{b}_i$ である．また，表現行列 C の (p,q) 成分を c_{pq} とすると，表現行列の定義より，$j=l+1,\cdots,n$ のとき，$[f]\big([\boldsymbol{a}_j]\big)=\sum_{i=k+1}^{m} c_{i-k,j-l}[\boldsymbol{b}_i]$ である．よって，$[f]$ の定義より，$j=l+1,\cdots,n$ のとき，$\big[f(\boldsymbol{a}_j)\big]=\left[\sum_{i=k+1}^{m} c_{i-k,j-l}\boldsymbol{b}_i\right]$，すなわち，$f(\boldsymbol{a}_j)-\sum_{i=k+1}^{m} c_{i-k,j-l}\boldsymbol{b}_i\in W'$ となる．ここで，$\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k\}$ は W' の基底なので，ある $d_{r,s}\in\mathbf{R}$ $(r=1,\cdots,k,\ s=1,\cdots,n-l)$ が存在し，$j=l+1,\cdots,n$ のとき，$f(\boldsymbol{a}_j)-\sum_{i=k+1}^{m} c_{i-k,j-l}\boldsymbol{b}_i=\sum_{i=1}^{k} d_{i,j-l}\boldsymbol{b}_i$，すなわち，$f(\boldsymbol{a}_j)=\sum_{i=1}^{k} d_{i,j-l}\boldsymbol{b}_i+\sum_{i=k+1}^{m} c_{i-k,j-l}\boldsymbol{b}_i$ となる．したがって，A は題意のように表される．

解 22.3　π^* が $(V/W)^*$ から $W^\perp$ への全単射を定めることを示せばよい．まず，π^* が単射であることを示す．π^* は線形写像なので，$\operatorname{Ker}\pi^*=\big\{\mathbf{0}_{(V/W)^*}\big\}$ であることを示せばよい［⇨［藤岡 1］**問 17.4** (2)］．$f\in\operatorname{Ker}\pi^*$ とする．このとき，$\pi^*(f)=\mathbf{0}_{V^*}$ なので，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，$\big(\pi^*(f)\big)(\boldsymbol{x})=0$ である．すなわち，双対写像の定義 (21.21) より，$f\big(\pi(\boldsymbol{x})\big)=0$ である．よって，任意の $[\boldsymbol{x}]\in V/W$ に対して，$f\big([\boldsymbol{x}]\big)=0$ となるので，$f=\mathbf{0}_{(V/W)^*}$ である．すなわち，$\operatorname{Ker}\pi^*=\big\{\mathbf{0}_{(V/W)^*}\big\}$ である．次に，$\operatorname{Im}\pi^*=W^\perp$ であることを示す．$\operatorname{Im}\pi^*\subset W^\perp$ および $W^\perp\subset\operatorname{Im}\pi^*$ を示せばよい．まず，$f\in(V/W)^*$ とする．$\boldsymbol{x}\in W$ のとき，$\big(\pi^*(f)\big)(\boldsymbol{x})=f\big(\pi(\boldsymbol{x})\big)$（∵ 双対写像の定義 (21.21)）$=f\big([\boldsymbol{x}]\big)\overset{\boldsymbol{x}\in W}{=}f\big([\mathbf{0}]\big)=0$（∵ f は線形写像）となる．すなわち，$\pi^*(f)\in W^\perp$ である．よって，$\operatorname{Im}\pi^*\subset W^\perp$ である．次に，$g\in W^\perp$ とする．すなわち，$g\in V^*$ であり，任意の $\boldsymbol{x}\in W$ に対して，$g(\boldsymbol{x})=0$ である．ここで，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$，$\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ とすると，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in W$ となるので，$g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{y})=g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$（∵ g は線形写像）$=0$ となる．すなわち，$g(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{y})$ となり，$f\in(V/W)^*$ を $f\big([\boldsymbol{x}]\big)=g(\boldsymbol{x})$ $([\boldsymbol{x}]\in V/W)$ により定めることができる．このとき，$\pi^*(f)=g$ となるので，$g\in\operatorname{Im}\pi^*$ である．よって，$W^\perp\subset\operatorname{Im}\pi^*$ である．したがって，$\operatorname{Im}\pi^*=W^\perp$ である．以上より，π^* は $(V/W)^*$ から $W^\perp$ への全単射を定める．

§ 23 の問題解答

解 23.1　まず，$\big(\iota(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big)(cf,g)\overset{(23.7)}{=}(cf)(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y})=cf(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y})$（∵ V^* のスカラー倍の定義 (21.7)）$\overset{(23.7)}{=}c\big(\iota(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big)(f,g)$ である．また，$\big(\iota(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big)(f,cg)\overset{(23.7)}{=}$

$f(\boldsymbol{x})(cg)(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) \cdot cg(\boldsymbol{y})$ (∵ W^* のスカラー倍の定義 (21.7)) $= cf(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y}) \overset{\because\ (23.7)}{=} c\big(\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\big)(f, g)$ である．よって，あたえられた式がなりたつ．

解 23.2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) \otimes \big(3\boldsymbol{e}'_1 + 2\boldsymbol{e}'_2 - \boldsymbol{e}'_3\big) \overset{\because\ (23.3)}{=} 1 \cdot 3\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_1 + 1 \cdot 2\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_2 + 1 \cdot (-1)\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_3 + 2 \cdot 3\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_1 + 2 \cdot 2\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_2 + 2 \cdot (-1)\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_3 = 3\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_1 + 2\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_2 - \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_3 + 6\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_1 + 4\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_2 - 2\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_3$ である．

解 23.3 (1) 題意より，$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ である．よって，表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ である．

(2) 題意より，$\begin{pmatrix} g(\boldsymbol{b}_1) & g(\boldsymbol{b}_2) & g(\boldsymbol{b}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である．よって，表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(3) (1), (2) より，表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\because\ (23.25)}{=}$

$$\begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 3\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ 2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & -1\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 9 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -6 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ である．

§ 24 の問題解答

解 24.1 ① $\tau(1)$，② $\tau(p)$，③ σ，④ $(\sigma\tau)$

解 24.2 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ を V の基底とする．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ も V の基底なので，ある $p_{ij} \in \mathbf{R}$ $(i, j = 1, 2)$ が存在し，$\boldsymbol{b}_i = p_{i1}\boldsymbol{a}_1 + p_{i2}\boldsymbol{a}_2$ となる．このとき，$i, j = 1, 2$ とすると，$\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j = (p_{i1}\boldsymbol{a}_1 + p_{i2}\boldsymbol{a}_2) \otimes (p_{j1}\boldsymbol{a}_1 + p_{j2}\boldsymbol{a}_2) = \sum_{k,l=1}^{2} p_{ik}p_{jl}\boldsymbol{a}_k \otimes \boldsymbol{a}_l$ である．よって，$P(\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j) = \sum_{k,l=1}^{2} p_{ik}p_{jl}P(\boldsymbol{a}_k \otimes \boldsymbol{a}_l) = \sum_{k,l=1}^{2} p_{jl}p_{ik}\boldsymbol{a}_l \otimes \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_i$ となる．したがって，P は基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ の選び方に依存しない．

解 24.3 (1) $t \in T^p(V)$ とすると，$(P_\sigma \circ \mathcal{S}_p)(t) = P_\sigma\big(\mathcal{S}_p(t)\big) \overset{\because\ (24.21)}{=}$

$P_\sigma\left(\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}P_\tau(t)\right)=\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}P_\sigma\big(P_\tau(t)\big)=\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}(P_\sigma\circ P_\tau)(t)\overset{\because\text{定理}24.2\,(2)}{=}$
$\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}P_{\sigma\tau}(t)\overset{\because(24.21)}{=}\mathcal{S}_p(t)$ となる．また，$(\mathcal{S}_p\circ P_\sigma)(t)=\mathcal{S}_p\big(P_\sigma(t)\big)\overset{\because(24.21)}{=}$
$\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}P_\tau\big(P_\sigma(t)\big)\overset{\because\text{定理}24.2\,(2)}{=}\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}P_{\tau\sigma}(t)\overset{\because(24.21)}{=}\mathcal{S}_p(t)$ となる．よって，(1) がなりたつ．

(2) $t\in T^p(V)$ とすると，$(\mathcal{S}_p\circ\mathcal{S}_p)(t)=\mathcal{S}_p\big(\mathcal{S}_p(t)\big)\overset{\because(24.21)}{=}\mathcal{S}_p\left(\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}P_\sigma(t)\right)=$
$\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(\mathcal{S}_p\circ P_\sigma)(t)\overset{\because(1)}{=}\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathcal{S}_p(t)=\mathcal{S}_p(t)$（$\because$ $\mathfrak{S}_p$ の元の個数は $p!$）となる．
よって，(2) がなりたつ．

解 24.4　(1) $t\in T^p(V)$ とすると，$(P_\sigma\circ\mathcal{A}_p)(t)=P_\sigma\big(\mathcal{A}_p(t)\big)\overset{\because(24.27)}{=}$
$P_\sigma\left(\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\tau)P_\tau(t)\right)=\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\tau)P_\sigma\big(P_\tau(t)\big)=\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\tau)(P_\sigma\circ P_\tau)(t)$
$=\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\sigma)^2(\operatorname{sgn}\tau)P_{\sigma\tau}(t)$（$\because$ $(\operatorname{sgn}\sigma)^2=1$，定理 24.2 (2)）$=$
$\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\sigma)\big(\operatorname{sgn}(\sigma\tau)\big)P_{\sigma\tau}(t)\overset{\because(24.27)}{=}(\operatorname{sgn}\sigma)\mathcal{A}_p(t)$ となる．また，$(\mathcal{A}_p\circ P_\sigma)(t)=$
$\mathcal{A}_p\big(P_\sigma(t)\big)\overset{\because(24.27)}{=}\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\tau)P_\tau\big(P_\sigma(t)\big)=\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\sigma)^2(\operatorname{sgn}\tau)P_{\tau\sigma}(t)$（$\because$
$(\operatorname{sgn}\sigma)^2=1$，定理 24.2 (2)）$=\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\sigma\tau)P_{\tau\sigma}(t)\overset{\because(24.27)}{=}(\operatorname{sgn}\sigma)\mathcal{A}_p(t)$
となる．よって，(1) がなりたつ．

(2) $t\in T^p(V)$ とすると，$(\mathcal{A}_p\circ\mathcal{A}_p)(t)=\mathcal{A}_p\big(\mathcal{A}_p(t)\big)\overset{\because(24.27)}{=}$
$\mathcal{A}_p\left(\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\sigma)P_\sigma(t)\right)=\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\sigma)(\mathcal{A}_p\circ P_\sigma)(t)\overset{\because(1)}{=}$
$\dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\sigma)^2\mathcal{A}_p(t)=\mathcal{A}_p(t)$（$\because$ $(\operatorname{sgn}\sigma)^2=1$，$\mathfrak{S}_p$ の元の個数は $p!$）となる．よって，(2) がなりたつ．

（お疲れさまでした）【終】