「行間を埋める」ために

- この別冊 PDF ファイルは『**手を動かしてまなぶ　続・線形代数**』（裳華房，2021 年刊）の本文中の ✍ のマークについて，その行間を埋めるための具体的なやり方を一例としてまとめたものです．
- この別冊 PDF ファイルを印刷して利用するときは，**「小冊子」モード**で印刷して二つ折にすると，A5 判サイズで本の巻末に挟み込んで利用することができます．
- この別冊内の見出しの「p. ○ 下から○行目」という表記では，該当書籍の対応するページ内の**脚注は行数にカウントしていません．**
- 数学書は証明や計算の細部が省略されていることが多いため，精読する際はペンと紙を用意して，**自分で詳細を計算すること**が極めて重要です．論理の行間を埋めていくことで数学の基礎体力がついてきます．
- 証明や計算の論理を追うときは **1 行 1 行疑ってかかる**くらいの態度で望みましょう．
- 論理の行間を埋めた後は，**その数学的内容を改めて見直してみましょう**．定義や定理の主張はなにか，仮定はなぜ必要なのか，証明した定理の具体例を上げることができるかなど，時間をかけてじっくりと味わうことが大切です．そうしないと**木を見て森を見ず**という状態に陥ったまま先へ進むことになりがちです．間違ってもよいので，慌てずに．
- 読者が手を動かしながら本書の隅々まで習熟され，線形代数の奥深い世界を自由に開拓していけますように．健闘を祈ります．

(2021 年 12 月 17 日版)

§1 の ✍ のマーク

p.3 上から 9 行目　$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ を n 個の 1 次独立な A の固有ベクトルとし，$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$\boldsymbol{p}_i$ は固有値 $\lambda_i \in \mathbf{R}$ に対する A の固有ベクトルであるとする．このとき，$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$（$i = 1, 2, \cdots, n$）なので，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおくと，

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

である．ここで，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は 1 次独立なので，P は正則である．よって，P の逆行列

P^{-1} が存在し，$(*)$ の両辺に左から P^{-1} をかけると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

となる．したがって，A は対角化可能である．

$\boxed{\text{p.6 脚注}}$　同次連立 1 次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において $\lambda = 1 - 2i$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，$\{(1-2i)E - A\}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-2ix_1 - x_2 = 0$，$4x_1 - 2ix_2 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = -2ci$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -2ci \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ と表されるので，$c = 1$ としたベクトル $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 1 - 2i$ に対する A の固有ベクトルである．

$\boxed{\text{p.9 下から 2 行目}}$　同次連立 1 次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において $\lambda = 1$ を代入し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，$(E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．すなわち，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-x_2 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$，$x_2 = 0$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので，固有値 $\lambda = 1$ に対する A の固有空間 $W(1)$ は (1.26) によりあたえられる．

§2 の ✍ のマーク

$\boxed{\text{p.15 脚注}}$　$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_2 = c_{12}\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, A\boldsymbol{p}_k = c_{1k}\boldsymbol{p}_1 + c_{2k}\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_{k-1,k}\boldsymbol{p}_{k-1} + \lambda_k\boldsymbol{p}_k$ となり，(2.15) がなりたつ．

$\boxed{\text{p.16 上から 6 行目}}$　まず，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$f(\boldsymbol{x}) \in V$ である．よって，V は f の不変部分空間である．次に，$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \in \{\boldsymbol{0}\}$ である．よって，$\{\boldsymbol{0}\}$ は f の不変部分空間である．

$\boxed{\text{p.16 下から 12 行目}}$　p.15 脚注の計算のように，$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1$，$A\boldsymbol{p}_2 = c_{12}\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2\boldsymbol{p}_2$，

$\cdots$，$A\boldsymbol{p}_k = c_{1k}\boldsymbol{p}_1 + c_{2k}\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_{k-1,k}\boldsymbol{p}_{k-1} + \lambda_k\boldsymbol{p}_k$ と表しておく．また，$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_k \rangle_{\mathbf{C}}$ とする．このとき，ある $d_1, d_2, \cdots, d_k \in \mathbf{C}$ が存在し，$\boldsymbol{x} = d_1\boldsymbol{p}_1 + d_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + d_k\boldsymbol{p}_k$ となる．よって，$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = A(d_1\boldsymbol{p}_1 + d_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + d_k\boldsymbol{p}_k) = d_1A\boldsymbol{p}_1 + d_2A\boldsymbol{p}_2 + \cdots + d_kA\boldsymbol{p}_k = d_1 \cdot \lambda_1\boldsymbol{p}_1 + d_2(c_{12}\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2\boldsymbol{p}_2) + \cdots + d_k(c_{1k}\boldsymbol{p}_1 + c_{2k}\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_{k-1,k}\boldsymbol{p}_{k-1} + \lambda_k\boldsymbol{p}_k) = (d_1\lambda_1 + d_2c_{12} + \cdots + d_kc_{1k})\boldsymbol{p}_1 + (d_2\lambda_2 + \cdots + d_kc_{2k})\boldsymbol{p}_2 + \cdots + d_k\lambda_k\boldsymbol{p}_k \in \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_k \rangle_{\mathbf{C}}$ となる．すなわち，$f_A(\boldsymbol{x}) \in \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_k \rangle_{\mathbf{C}}$ である．

p.19 上から 10 行目　p.15 脚注の計算のように，$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1$，$A\boldsymbol{p}_2 = c_{12}\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2\boldsymbol{p}_2$，$\cdots$，$A\boldsymbol{p}_k = c_{1k}\boldsymbol{p}_1 + c_{2k}\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_{k-1,k}\boldsymbol{p}_{k-1} + \lambda_k\boldsymbol{p}_k$ と表しておく．このとき，$(A - \lambda_2E)\boldsymbol{p}_2 = c_{12}\boldsymbol{p}_1 \in \langle \boldsymbol{p}_1 \rangle_{\mathbf{C}}$，$\cdots$，$(A - \lambda_kE)\boldsymbol{p}_k = c_{1k}\boldsymbol{p}_1 + c_{2k}\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_{k-1,k}\boldsymbol{p}_{k-1} \in \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_{k-1} \rangle_{\mathbf{C}}$ である．

§3 の ✍ のマーク

p.23 脚注　$\boldsymbol{x} \in W(\lambda)$ より，$A\boldsymbol{x} = \lambda x$ である．さらに，$AB = BA$ より，$A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x} = (BA)\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x}) = B(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(B\boldsymbol{x})$ となる．すなわち，$A(B\boldsymbol{x}) = \lambda(B\boldsymbol{x})$ である．よって，$B\boldsymbol{x} \in W(\lambda)$ である．

§4 の ✍ のマーク

p.38 上から 6 行目　A を 1 個の固有値 $\lambda \in \mathbf{C}$ のみをもつ対角化可能な正方行列とする．このとき，A はある正則行列 P を用いて，$P^{-1}AP = \lambda E$ と対角化される．この式の両辺に左から P，右から P^{-1} をかけると，$A = \lambda E$ となる．よって，A はスカラー行列である．

p.43 下から 9 行目　$(A - \lambda E)P = \begin{pmatrix} (A - \lambda E)^2\boldsymbol{x}_1 & (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1 & (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1 & (\mu - \lambda)\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix} =$

$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix}$，すなわち，$P^{-1}(A - \lambda E)P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix}$ である．さらに，この式は (4.47) と同値である．

§5 の ✍ のマーク

p.53 下から 6 行目　Sym(n) が部分空間となること　次の部分空間の条件 (1)〜(3) を示せばよい．

(1) $O \in \mathrm{Sym}(n)$．ただし，O は n 次の零行列である．

(2) $X,\ Y \in \mathrm{Sym}(n)$ ならば，$X + Y \in \mathrm{Sym}(n)$．

(3) $c \in \mathbf{R}$，$X \in \mathrm{Sym}(n)$ ならば，$cX \in \mathrm{Sym}(n)$．

(1) O の成分はすべて 0 なので，${}^tO = O$ である．よって，$O \in \mathrm{Sym}(n)$ である．

(2) $X,\ Y \in \mathrm{Sym}(n)$ とすると，${}^t(X+Y) = {}^tX + {}^tY = X + Y$ となる．すなわち，${}^t(X+Y) = X+Y$ である．よって，$X+Y \in \mathrm{Sym}(n)$ である．

(3) $c \in \mathbf{R}$，$X \in \mathrm{Sym}(n)$ とすると，${}^t(cX) = c^tX = cX$ となる．すなわち，${}^t(cX) = cX$ である．よって，$cX \in \mathrm{Sym}(n)$ である．

Skew(n) が部分空間となること　次の部分空間の条件 (1)〜(3) を示せばよい．

(1) $O \in \mathrm{Skew}(n)$．

(2) $X,\ Y \in \mathrm{Skew}(n)$ ならば，$X + Y \in \mathrm{Skew}(n)$．

(3) $c \in \mathbf{R}$，$X \in \mathrm{Skew}(n)$ ならば，$cX \in \mathrm{Skew}(n)$．

(1) O の成分はすべて 0 なので，${}^tO = -O$ である．よって，$O \in \mathrm{Skew}(n)$ である．

(2) $X,\ Y \in \mathrm{Skew}(n)$ とすると，${}^t(X+Y) = {}^tX + {}^tY = -X - Y = -(X+Y)$ となる．すなわち，${}^t(X+Y) = -(X+Y)$ である．よって，$X+Y \in \mathrm{Skew}(n)$ である．

(3) $c \in \mathbf{R}$，$X \in \mathrm{Skew}(n)$ とすると，${}^t(cX) = c^tX = c(-X) = -cX$ となる．すなわち，${}^t(cX) = -cX$ である．よって，$cX \in \mathrm{Skew}(n)$ である．

p.53 下から 3 行目　$X \in M_n(\mathbf{R})$ とする．このとき，$X = \frac{1}{2}(X + {}^tX) + \frac{1}{2}(X - {}^tX)$ である．ここで，${}^t\left\{\frac{1}{2}(X + {}^tX)\right\} = \frac{1}{2}\left\{{}^tX + {}^t({}^tX)\right\} = \frac{1}{2}({}^tX + X) = \frac{1}{2}(X + {}^tX)$ である．すなわち，${}^t\left\{\frac{1}{2}(X + {}^tX)\right\} = \frac{1}{2}(X + {}^tX)$ となり，$\frac{1}{2}(X + {}^tX) \in \mathrm{Sym}(n)$ である．また，${}^t\left\{\frac{1}{2}(X - {}^tX)\right\} = \frac{1}{2}\left\{{}^tX - {}^t({}^tX)\right\} = \frac{1}{2}({}^tX - X) = -\frac{1}{2}(X - {}^tX)$ である．すなわち，${}^t\left\{\frac{1}{2}(X - {}^tX)\right\} = -\frac{1}{2}(X - {}^tX)$ となり，$\frac{1}{2}(X - {}^tX) \in \mathrm{Skew}(n)$ である．さらに，$X = X_1 + X_2 = X_1' + X_2'$（$X_1,\ X_1' \in \mathrm{Sym}(n)$，$X_2,\ X_2' \in \mathrm{Skew}(n)$）とする．このとき，$X_1 - X_1' = X_2' - X_2$ である．ここで，$\mathrm{Sym}(n)$，$\mathrm{Skew}(n)$ は $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間なので，$X_1 - X_1' = X_2' - X_2 \in \mathrm{Sym}(n) \cap \mathrm{Skew}(n)$ である．よって，$X_1 - X_1' = {}^t(X_1 - X_1') = {}^t(X_2' - X_2) = -(X_2' - X_2) = -(X_1 - X_1')$ となる．すなわち，$X_1 - X_1' = -(X_1 - X_1')$ となるので，$2(X_1 - X_1') = O$ より，$X_1 = X_1'$ である．さらに，$X_2 = X_2'$ となる．以上および定義 5.1 より，(5.36) がなりたつ．

p.55 下から 10 行目　$m=2$ のとき，部分空間に対する次元定理（定理 5.3）より，(5.40) がなりたつ．$m=k$（$k=2,\,3,\,\cdots$）のとき，(5.40) がなりたつと仮定する．このとき，部分空間に対する次元定理（定理 5.3）および帰納法の仮定より，$\dim(W_1+\cdots+W_{k+1})=\dim(W_1+\cdots+W_k)+\dim W_{k+1}-\dim\left((W_1+\cdots+W_k)\cap W_{k+1}\right)=\sum_{j=1}^{k}\dim W_j-\sum_{j=2}^{k}\dim\left((W_1+\cdots+W_{j-1})\cap W_j\right)+\dim W_{k+1}-\dim\left((W_1+\cdots+W_k)\cap W_{k+1}\right)=\sum_{j=1}^{k+1}\dim W_j-\sum_{j=2}^{k+1}\dim\left((W_1+\cdots+W_{j-1})\cap W_j\right)$ となる．よって，$m=k+1$ のとき，(5.40) がなりたつ．したがって，(5.40) がなりたつ．

§6 の ✍ のマーク

p.58 下から 5 行目　$A^2=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}=O$ である．

p.58 下から 3 行目　まず，$A^2=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．

よって，$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}=O$ である．

p.58 下から 2 行目　A をすべての対角成分が 0 の n 次の上三角行列とし，命題「$m=1,\,2,\,\cdots$ に対して，A^m の (i,j) 成分は $j\leq i+m-1$ のとき 0 である．」を m に関する数学的帰納法により示す．とくに，$m=n$ とすると，$A^n=O$ となり，A はべき零行列である．$m=1$ のとき，A の定義より，上の命題がなりたつ．$m=l$（$l=1,\,2,\,\cdots$）のとき，上の命題がなりたつと仮定する．A および A^l の (i,j) 成分をそれぞれ a_{ij}，a'_{ij} とすると，帰納法の仮定より，A^{l+1} の (i,k) 成分は $\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}a_{jk}=\sum_{j=i+l}^{n}a'_{ij}a_{jk}$ となる．よって，A の定義より，A^{l+1} の (i,k) 成分は $k\leq i+l$ のとき 0 となる．すなわち，$m=l+1$ のとき，上の命題がなりたつ．したがって，上の命題がなりたつ．

p.59 下から 9 行目　A を対角化可能なべき零行列とする．このとき，定理 6.1 より，A

のすべての固有値は 0 なので，ある正則行列 P が存在し，$P^{-1}AP = O$ となる．よって，$A = O$ となり，A は零行列である．

$\boxed{\text{p.59 脚注}}$　定理 6.1 より，N のすべての固有値は 0 である．よって，定理 6.1 の十分性の証明より，$N^n = O$ である．したがって，$k \leq n$ となる．

$\boxed{\text{p.61 下から 11 行目}}$　(6.16) および $W_k = \mathbf{C}^n$ より，$d_1 + d_2 + \cdots + d_k = \dim W_1 + \sum_{j=2}^{k}(\dim W_j - \dim W_{j-1}) = \dim W_k = \dim \mathbf{C}^n = n$ である．

$\boxed{\text{p.63 上から 8 行目}}$　(1)′ $l = 1, \cdots, d_k$ とすると，$N^{k-2}(N^2\boldsymbol{x}_l) = N^k\boldsymbol{x}_l = O\boldsymbol{x}_l = \mathbf{0}$ である．よって，(6.14) において $j = k-2$ とした W_{k-2} の定義より，(1)′ がなりたつ．
(2)′ $N^2\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^2\boldsymbol{x}_{d_k}$ の 1 次関係 $c_1 \cdot N^2\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N^2\boldsymbol{x}_{d_k} = \mathbf{0}$（$c_1, \cdots, c_{d_k} \in \mathbf{C}$）を考えると，$N(c_1 \cdot N\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N\boldsymbol{x}_{d_k}) = \mathbf{0}$ である．よって，(6.14) において $j = 1$ とした W_1 の定義および (6.15) より，

$$c_1 \cdot N\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N\boldsymbol{x}_{d_k} \in W_1 \subset W_{k-2} \qquad (*)$$

である．(6.25), $(*)$ および定理 5.2 の (1)⇔(4) より，$c_1 \cdot N\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N\boldsymbol{x}_{d_k} = \mathbf{0}$ である．さらに，$N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k}$ は 1 次独立なので，$c_1 = \cdots = c_{d_k} = 0$ である．したがって，(2)′ がなりたつ．
(3)′ $c_1, \cdots, c_{d_k} \in \mathbf{C}$ に対して，$c_1 \cdot N^2\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N^2\boldsymbol{x}_{d_k} \in W_{k-3}$ とすると，$N^{k-2}(c_1 \cdot N\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N\boldsymbol{x}_{d_k}) = N^{k-3}(c_1 \cdot N^2\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N^2\boldsymbol{x}_{d_k}) = \mathbf{0}$ である．よって，$c_1 \cdot N\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N\boldsymbol{x}_{d_k} \in W_{k-2} \cap \langle N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k}\rangle_{\mathbf{C}}$ である．さらに，(6.28) および定理 5.2 の (1)⇔(4) より，$c_1 \cdot N\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N\boldsymbol{x}_{d_k} = \mathbf{0}$ である．ここで，$N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k}$ は 1 次独立なので，$c_1 = \cdots = c_{d_k} = 0$ である．したがって，(3)′ がなりたつ．

$\boxed{\text{p.63 下から 10 行目}}$　(1)″ (1)′ より，$N\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_{k-1}} \in W_{k-2}$ を示せばよい．$l = d_k + 1, \cdots, d_{k-1}$ とすると，$\boldsymbol{x}_l \in W_{k-1}$ および (6.14) において $j = k-1$ とした W_{k-1} の定義より，$N^{k-1}\boldsymbol{x}_l = \mathbf{0}$ である．よって，$N^{k-2}(N\boldsymbol{x}_l) = N^{k-1}\boldsymbol{x}_l = \mathbf{0}$ である．したがって，(6.14) において $j = k-2$ とした W_{k-2} の定義より，$N\boldsymbol{x}_l \in W_{k-2}$ である．
(2)″ $N^2\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^2\boldsymbol{x}_{d_k}, N\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$ の 1 次関係 $c_1 \cdot N^2\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N^2\boldsymbol{x}_{d_k} + c_{d_k+1} \cdot N\boldsymbol{x}_{d_k+1} + \cdots + c_{d_{k-1}} \cdot N\boldsymbol{x}_{d_{k-1}} = \mathbf{0}$ （$c_1, \cdots, c_{d_{k-1}} \in \mathbf{C}$）を考えると，$N(c_1 \cdot N\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{d_k} \cdot N\boldsymbol{x}_{d_k} + c_{d_k+1}\boldsymbol{x}_{d_k+1} + \cdots + c_{d_{k-1}}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}) = \mathbf{0}$

である．よって，(6.14) において $j=1$ とした W_1 の定義および (6.15) より，

$$c_1\cdot N\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{d_k}\cdot N\boldsymbol{x}_{d_k}+c_{d_k+1}\boldsymbol{x}_{d_k+1}+\cdots+c_{d_{k-1}}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}\in W_1\subset W_{k-2}(*)$$

である．(6.29), $(*)$ および定理 5.2 の (1)⇔(4) より，$c_1\cdot N\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{d_k}\cdot N\boldsymbol{x}_{d_k}+c_{d_k+1}\boldsymbol{x}_{d_k+1}+\cdots+c_{d_{k-1}}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}=\boldsymbol{0}$ である．さらに，$N\boldsymbol{x}_1,\cdots,N\boldsymbol{x}_{d_k},\boldsymbol{x}_{d_k+1},\cdots,\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$ は 1 次独立なので，$c_1=\cdots=c_{d_{k-1}}=0$ である．したがって，(2)$''$ がなりたつ．

(3)$''$ $c_1,\cdots,c_{d_{k-1}}\in\mathbf{C}$ に対して，$c_1\cdot N^2\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{d_k}\cdot N^2\boldsymbol{x}_{d_k}+c_{d_k+1}\cdot N\boldsymbol{x}_{d_k+1}+\cdots+c_{d_{k-1}}\cdot N\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}\in W_{k-3}$ とすると，
$N^{k-2}(c_1\cdot N\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{d_k}\cdot N\boldsymbol{x}_{d_k}+c_{d_k+1}\boldsymbol{x}_{d_k+1}+\cdots+c_{d_{k-1}}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}})=$
$N^{k-3}(c_1\cdot N^2\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{d_k}\cdot N^2\boldsymbol{x}_{d_k}+c_{d_k+1}\cdot N\boldsymbol{x}_{d_k+1}+\cdots+c_{d_{k-1}}\cdot N\boldsymbol{x}_{d_{k-1}})=$
$\boldsymbol{0}$ である．よって，$c_1\cdot N\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{d_k}\cdot N\boldsymbol{x}_{d_k}+c_{d_k+1}\boldsymbol{x}_{d_k+1}+\cdots+c_{d_{k-1}}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}\in W_{k-2}\cap\langle N\boldsymbol{x}_1,\cdots,N\boldsymbol{x}_{d_k},\boldsymbol{x}_{d_k+1},\cdots,\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}\rangle_{\mathbf{C}}$ である．さらに，(6.29) および定理 5.2 の (1)⇔(4) より，$c_1\cdot N\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_{d_k}\cdot N\boldsymbol{x}_{d_k}+c_{d_k+1}\boldsymbol{x}_{d_k+1}+\cdots+c_{d_{k-1}}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}=\boldsymbol{0}$ である．ここで，$N\boldsymbol{x}_1,\cdots,N\boldsymbol{x}_{d_k},\boldsymbol{x}_{d_k+1},\cdots,\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$ は 1 次独立なので，$c_1=\cdots=c_{d_{k-1}}=0$ である．したがって，(3)$''$ がなりたつ．

§7 の ✍ のマーク

p.75 下から 9 行目　次の部分空間の条件 (1)〜(3) を示せばよい．

(1) $\boldsymbol{0}\in\tilde{W}(\lambda_k)$.

(2) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\tilde{W}(\lambda_k)$ ならば，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\tilde{W}(\lambda_k)$.

(3) $c\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{x}\in\tilde{W}(\lambda_k)$ ならば，$c\boldsymbol{x}\in\tilde{W}(\lambda_k)$.

(1) $(A-\lambda_kE)\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ である．よって，$\boldsymbol{0}\in\tilde{W}(\lambda_k)$ である．

(2) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\tilde{W}(\lambda_k)$ とする．このとき，ある自然数 j_1, j_2 が存在し，$(A-\lambda_kE)^{j_1}\boldsymbol{x}=0$, $(A-\lambda_kE)^{j_2}\boldsymbol{y}=0$ となる．よって，$(A-\lambda_kE)^{j_1+j_2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=$
$(A-\lambda_kE)^{j_2}(A-\lambda_kE)^{j_1}\boldsymbol{x}+(A-\lambda_kE)^{j_1}(A-\lambda_kE)^{j_2}\boldsymbol{y}=(A-\lambda_kE)^{j_2}\boldsymbol{0}+$
$(A-\lambda_kE)^{j_1}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ である．したがって，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\tilde{W}(\lambda_k)$ である．

(3) $c\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{x}\in\tilde{W}(\lambda_k)$ とする．このとき，ある自然数 j が存在し，$(A-\lambda_kE)^j\boldsymbol{x}=0$ となる．よって，$(A-\lambda_kE)^j(c\boldsymbol{x})=c(A-\lambda_kE)^j\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ である．したがって，$c\boldsymbol{x}\in\tilde{W}(\lambda_k)$ である．

p.77 脚注　同次連立 1 次方程式 $(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ において $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ とすると，

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって，$-x_2 = 0$ となり，$c \in \mathbf{C}$ を任意の定数として，$x_1 = c$ とおくと，解は $x_1 = c$, $x_2 = 0$ である．したがって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので，$W(\lambda) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{C} \right\} \neq \mathbf{C}^2 = \tilde{W}(\lambda)$ である．

§8 の ✍ のマーク

$\boxed{\text{p.82 上から 5 行目}}$　(8.2) の両辺に左から P^{-1}，右から P をかけると，$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{m_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{m_2} & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_r E_{m_r} \end{pmatrix}$ である．よって，(2) がなりたつ．

$\boxed{\text{p.82 上から 7 行目}}$　(1) $N = A - S$ より，(1) がなりたつ．

(3) $J = \begin{pmatrix} J(0;m_1) & & & \\ & J(0;m_2) & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & J(0;m_r) \end{pmatrix}$ とおくと，$N = PJP^{-1}$ である．ここで，J はすべての対角成分が 0 の上三角行列なので，べき零行列である．よって，ある自然数 k が存在し，$J^k = O$ となる．このとき，$N^k = \underbrace{(PJP^{-1})(PJP^{-1})\cdots(PJP^{-1})}_{k\text{ 個}} = PJ^kP^{-1} = POP^{-1} = O$ である．すなわち，$N^k = O$ となり，(3) がなりたつ．

(4) (8.1)，(8.2) より，$AS = P\begin{pmatrix} J(\lambda_1;m_1) & & & \\ & J(\lambda_2;m_2) & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & J(\lambda_r;m_r) \end{pmatrix}P^{-1}$ ．

$P\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{m_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{m_2} & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_r E_{m_r} \end{pmatrix}P^{-1} =$

$$P\begin{pmatrix} J(\lambda_1;m_1)\cdot\lambda_1 E_{m_1} & & & \text{\Large 0} \\ & J(\lambda_2;m_2)\cdot\lambda_2 E_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & J(\lambda_r;m_r)\cdot\lambda_r E_{m_r} \end{pmatrix}P^{-1} =$$

$$P\begin{pmatrix} \lambda_1 J(\lambda_1;m_1) & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 J(\lambda_2;m_2) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_r J(\lambda_r;m_r) \end{pmatrix}P^{-1}$$ である．同様に，$SA =$

$$P\begin{pmatrix} \lambda_1 J(\lambda_1;m_1) & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 J(\lambda_2;m_2) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_r J(\lambda_r;m_r) \end{pmatrix}P^{-1}$$ である．よって，$AS =$ SA である．したがって，$SN = S(A-S) = SA - S^2 = AS - S^2 = (A-S)S = NS$ となり，(4) がなりたつ．

p.84 脚注　サラスの方法より，$|P| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 4\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot 1 = 4$ である．また，$\tilde{p}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$，$\tilde{p}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$，$\tilde{p}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$，$\tilde{p}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$，$\tilde{p}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\tilde{p}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\tilde{p}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\tilde{p}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4$，$\tilde{p}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ である．よって，$P^{-1} =$

$$\frac{1}{|P|}\begin{pmatrix} \tilde{p}_{11} & \tilde{p}_{21} & \tilde{p}_{31} \\ \tilde{p}_{12} & \tilde{p}_{22} & \tilde{p}_{32} \\ \tilde{p}_{13} & \tilde{p}_{23} & \tilde{p}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ である．

p.86 下から 3 行目（1 つめ）　$SN = NS$ より，$NS^{-1} = S^{-1}N$ である．また，N はべき零行列なので，ある自然数 k が存在し，$N^k = O$ となる．よって，$(S^{-1}N)^k = (S^{-1})^k N^k = (S^{-1})^k O = O$ となる．したがって，$S^{-1}N$ はべき零行列である．

p.86 下から 3 行目（2 つめ）　$S^{-1}N$ はべき零行列なので，$E + S^{-1}N$ はジョルダン分

解の存在定理（定理 8.1）における (2)〜(4) をみたす．とくに，$E+S^{-1}N$ の半単純部分は E である．よって，E の固有値が 1 のみであることより，$E+S^{-1}N$ の固有値は 1 のみである．したがって，$E+S^{-1}N$ はべき単行列である．

p.87 上から 4 行目　$A \in M_n(\mathbf{C})$ の乗法的ジョルダン分解を $A=SU$ とすると，$A=S+S(U-E)$ である．U はべき単行列なので，ある正則行列 P が存在し，$P^{-1}UP$ はすべての対角成分が 1 のジョルダン標準形となる．このとき，$P^{-1}(U-E)P=P^{-1}UP-E$ はすべての対角成分が 0 のジョルダン標準形となるから，べき零行列である．よって，$U-E$ はべき零行列である．さらに，$SU=US$ より，$S(U-E)$ はべき零行列である．したがって，$A=S+S(U-E)$ はジョルダン分解の存在定理（定理 8.1）における (2)〜(4) をみたす．ここで，$A=S'U'$ も A の乗法的ジョルダン分解とすると，A のジョルダン分解 $A=S'+S'(U'-E)$ が得られる．このとき，ジョルダン分解の一意性（定理 9.5）より，$S=S'$，$S(U-E)=S'(U'-E)$ である．さらに，S，S' は正則なので，$U=U'$ となる．以上より，乗法的ジョルダン分解は一意的である．

§9 の ✍ のマーク

p.92 下から 2 行目　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ とすると，ある $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_m \in W_m$ が一意的に存在し，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_m$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1+\cdots+\boldsymbol{y}_m$ となる．$k=1, \cdots, m$ とすると，$\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{y}_k \in W_k$ なので，$p_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=p_j\left((\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_m)+(\boldsymbol{y}_1+\cdots+\boldsymbol{y}_m)\right)=p_j\left((\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)+\cdots+(\boldsymbol{x}_m+\boldsymbol{y}_m)\right)=\boldsymbol{x}_j+\boldsymbol{y}_j=p_j(\boldsymbol{x})+p_j(\boldsymbol{y})$ である．すなわち，$p_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=p_j(\boldsymbol{x})+p_j(\boldsymbol{y})$ である．さらに，$c \in \mathbf{C}$ とする．$k=1, \cdots, m$ とすると，$c\boldsymbol{x}_k \in W_k$ なので，$p_j(c\boldsymbol{x})=p_j\left(c(\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_m)\right)=p_j(c\boldsymbol{x}_1+\cdots+c\boldsymbol{x}_m)=c\boldsymbol{x}_j=cp_j(\boldsymbol{x})$ である．すなわち，$p_j(c\boldsymbol{x})=cp_j(\boldsymbol{x})$ である．よって，p_j は V の線形変換である．

p.92 下から 1 行目　$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，ある $\boldsymbol{x}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m \in W_m$ が一意的に存在し，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_m$ となる．

(1) $(p_j \circ p_k)(\boldsymbol{x})=p_j\left(p_k(\boldsymbol{x})\right)=p_j(\boldsymbol{x}_k)=\delta_{jk}\boldsymbol{x}_k=\delta_{jk}\boldsymbol{x}_j=\delta_{jk}p_j(\boldsymbol{x})$ である．よって，(1) がなりたつ．

(2) $p_1(\boldsymbol{x})+\cdots+p_m(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{x}$ である．よって，(2) がなりたつ．

(3) まず，$\boldsymbol{x}_j \in W_j$ とすると，$\boldsymbol{x}_j=p_j(\boldsymbol{x}_j) \in \operatorname{Im} p_j$ である．よって，$W_j \subset \operatorname{Im} p_j$ である．また，p_j の定義 (9.3) より，$\operatorname{Im} p_j \in W_j$ である．したがって，(3) がなりたつ．

p.94 上から 3 行目　ジョルダン標準形の存在定理（定理 7.3）より，ある正則な $P \in$

$M_n(\mathbf{C})$ が存在し，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & J_r \end{pmatrix}$ と表される．ただし，$j = 1, \cdots, r$ に対して，J_j は固有値が λ_j のジョルダン細胞からなるジョルダン標準形である．ここで，J_j を m_j 次の正方行列とし，P を $P = (\ P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_r\ )$ とブロック分割しておく．ただし，$j = 1, 2, \cdots, r$ に対して，P_j は n 行 m_j 列の行列である．このとき，$AP_j = P_j J_j$ となる．また，P は正則なので，P の各列ベクトルは $\mathbf{C}^n$ の基底となる．よって，A のジョルダン標準形が 1 個のジョルダン細胞からなる $r = 1$ の場合の計算と同様に，P_j の各列ベクトルは $\tilde{W}(\lambda_j)$ の基底となり，(9.10) の直和分解が得られる．したがって，$m_j = \dim\left(\tilde{W}(\lambda_j)\right)$ であり，A の固有多項式はジョルダン標準形の固有多項式に一致するので，(9.11) が得られる．

§10 の ✍ のマーク

$\boxed{\text{p.105 上から 3 行目}}$　k を自然数とすると，$(P^{-1}AP)^k = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k\text{ 個}} = P^{-1}A^kP$ である．よって，$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$　$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbf{C})$ と表しておくと，$f(P^{-1}AP) = a_0(P^{-1}AP)^m + a_1(P^{-1}AP)^{m-1} + \cdots + a_{m-1}P^{-1}AP + a_mE = a_0P^{-1}A^mP + a_1P^{-1}A^{m-1}P + \cdots + a_{m-1}P^{-1}AP + a_mE = P^{-1}(a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mE)P = P^{-1}f(A)P$ となる．

$\boxed{\text{p.105 上から 11 行目}}$　(6.1) より，$\lambda E - J(\lambda'; n)$ はすべての対角成分が $\lambda - \lambda'$ の n 次の正方行列となる．よって，(10.11) がなりたつ．

$\boxed{\text{p.105 下から 11 行目}}$　まず，$J(\lambda'; n) - \lambda' E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = J(0; n)$

である．さらに，$J(0; n)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, J(0;n)^{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, J(0;n)^{n-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, J(0;n)^{n} = O$$ となる．よって，(10.12), (10.13) が得られる．

$\boxed{\text{p.106 脚注}}$ $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$（$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$）のとき　まず，$\phi_J(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ である．次に，固有値 λ_1 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次のものが 1，固有値 λ_2 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次のものが 1 である．よって，固有値 λ_1, λ_2 に対する J の標数はそれぞれ 1，1 である．したがって，定理 10.4 の (1) より，$\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ である．さらに，固有空間，広義固有空間の次元は (10.16), (10.17) の通りとなる．

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$（$\lambda_1 \in \mathbf{C}$）のとき　まず，$\phi_J(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_1)^2$ である．次に，固有値 λ_1 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次のものが 2 である．よって，固有値 λ_1 に対する J の標数は 1 である．したがって，定理 10.4 の (1) より，$\psi_J(\lambda) = \lambda - \lambda_1$ である．さらに，固有空間，広義固有空間の次元は (10.21) の通りとなる．

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$（$\lambda_1 \in \mathbf{C}$）のとき　まず，$\phi_J(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_1)^2$ である．次に，固有値 λ_1 の J のジョルダン細胞の個数は 2 次のものが 1 である．よって，固有値 λ_1 に対する J の標数は 2 である．したがって，定理 10.4 の (1) より，$\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$ である．さらに，固有空間，広義固有空間の次元は (10.23) の通りとなる．

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$（$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$，$\lambda_1 \neq \lambda_3$，$\lambda_2 \neq \lambda_3$）のとき

まず，$\phi_J(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ である．次に，固有値 λ_1 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次のものが 1，固有値 λ_2 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次の

ものが 1，固有値 λ_3 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次のものが 1 である．よって，固有値 λ_1, λ_2, λ_3 に対する J の標数はそれぞれ 1, 1, 1 である．したがって，定理 10.4 の (1) より，$\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ である．さらに，固有空間，広義固有空間の次元は (10.27), (10.28) の通りとなる．

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ （$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$）のとき　まず，$\phi_J(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)$ である．次に，固有値 λ_1 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次のものが 2，固有値 λ_2 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次のものが 1 である．よって，固有値 λ_1, λ_2 に対する J の標数はそれぞれ 1, 1 である．したがって，定理 10.4 の (1) より，$\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ である．さらに，固有空間，広義固有空間の次元は (10.32), (10.33) の通りとなる．

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ （$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$）のとき　まず，$\phi_J(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)$ である．次に，固有値 λ_1 の J のジョルダン細胞の個数は 2 次のものが 1，固有値 λ_2 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次のものが 1 である．よって，固有値 λ_1, λ_2 に対する J の標数はそれぞれ 2, 1 である．したがって，定理 10.4 の (1) より，$\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)$ である．さらに，固有空間，広義固有空間の次元は (10.35), (10.36) の通りとなる．

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ （$\lambda_1 \in \mathbf{C}$）のとき　まず，$\phi_J(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_1)^3$ である．次に，固有値 λ_1 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次のものが 3 である．よって，固有値 λ_1 に対する J の標数は 1 である．したがって，定理 10.4 の (1) より，$\psi_J(\lambda) = \lambda - \lambda_1$ である．さらに，固有空間，広義固有空間の次元は (10.41) の通りとなる．

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ （$\lambda_1 \in \mathbf{C}$）のとき　まず，$\phi_J(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_1)^3$ である．次に，固有値 λ_1 の J のジョルダン細胞の個数は 1 次のものが 1，2 次のものが 1 である．よって，固有値 λ_1 に対する J の標数は 2 である．したがって，定理 10.4 の (1) より，$\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$ である．さらに，固有空間，広義固有空間の次元は (10.43) の通りとなる．

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$（$\lambda_1 \in \mathbf{C}$）のとき　まず，$\phi_J(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_1)^3$ である．次に，固有値 λ_1 の J のジョルダン細胞の個数は 3 次のものが 1 である．よって，固有値 λ_1 に対する J の標数は 3 である．したがって，定理 10.4 の (1) より，$\psi_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3$ である．さらに，固有空間，広義固有空間の次元は (10.45) の通りとなる．

§ 11 の ✍ のマーク

p.119 下から 7 行目　$P_1, \cdots, P_r$ が A の行列多項式であることと (11.17) より，$N^2 = \{(A - \lambda_1 E)P_1 + \cdots + (A - \lambda_r E)P_r\}^2 = \{(A - \lambda_1 E)P_1\}^2 + \cdots + \{(A - \lambda_r E)P_r\}^2 + 2\sum_{j \neq k}(A - \lambda_j E)(A - \lambda_k E)P_j P_k = (A - \lambda_1 E)^2 P_1^2 + \cdots + (A - \lambda_r E)^2 P_r^2 + 2\sum_{j \neq k}(A - \lambda_j E)(A - \lambda_k E)O = (A - \lambda_1 E)^2 P_1 + \cdots + (A - \lambda_r E)^2 P_r$ となる．以下，同様に計算すると，(11.22) が得られる．

p.122 上から 5 行目　(11.35) は (11.29) において，$n = 2$，$a_1 = -1$，$a_2 = -1$ としたものと同値である．よって，(11.30) の A，(11.31) の $\boldsymbol{x}_k$ は (11.36) の通りとなり，(11.5) が得られる．

§ 12 の ✍ のマーク

p.126 上から 4 行目　(12.1) より, $\exp tA = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$ である．よって, $(\exp tA)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^k = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^{k-1} == A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k = A \exp tA$ である．

p.126 上から 6 行目　まず, $\exp O = E$ より, (12.8) は $t = 0$ のとき, 等式 $\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}(0)$ となることに注意する．次に, (12.7) より, $\boldsymbol{z}'(t) = (\exp tA)'\boldsymbol{z}(0) = A(\exp tA)\boldsymbol{z}(0) = A\boldsymbol{z}(t)$ である．よって，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t)$ は (12.6) の解である．

p.126 下から 4 行目　(12.9) より，$P^{-1}(tA)P =$

$\begin{pmatrix} tJ(\lambda_1;m_1) & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & tJ(\lambda_r;m_r) \end{pmatrix}$ である．よって，$k=1,\,2,\,\cdots$ とすると，(11.8) の計算と同様に，$\left\{P^{-1}(tA)P\right\}^k = \begin{pmatrix} (tJ(\lambda_1;m_1))^k & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & (tJ(\lambda_r;m_r))^k \end{pmatrix}$ である．したがって，(12.1) より，$\exp\left\{P^{-1}(tA)P\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{P^{-1}(tA)P\right\}^k =$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix} (tJ(\lambda_1;m_1))^k & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & (tJ(\lambda_r;m_r))^k \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \exp tJ(\lambda_1;m_1) & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \exp tJ(\lambda_r;m_r) \end{pmatrix}$ となる．さらに，定理12.1の(5)より，$\exp tA$

$= P\exp\left\{P^{-1}(tA)P\right\}P^{-1} = P\begin{pmatrix} \exp tJ(\lambda_1;m_1) & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \exp tJ(\lambda_r;m_r) \end{pmatrix}P^{-1}$ である．

$\boxed{\text{p.127 下から 1 行目}}$　まず，$tJ(0;n) = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．さらに，

$$(tJ(0;n))^2 = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \ (tJ(0;n))^{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & t^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(tJ(0;n))^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ となる．よって，(12.13) が得られる．

$\boxed{\text{p.129 下から 5 行目}}$ $\exp(\lambda_1 tP_1 + \cdots + \lambda_r tP_r) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\lambda_1 tP_1 + \cdots + \lambda_r tP_r)^k$
$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left\{(\lambda_1 t)^k P_1 + \cdots + (\lambda_r t)^k P_r\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\lambda_1 t)^k P_1 + \cdots + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\lambda_r t)^k P_r$
$= e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r$ である．

$\boxed{\text{p.130 上から 7 行目}}$ $\exp tA = \exp(\lambda_1 tP_1 + \cdots + \lambda_r tP_r)(\exp tN) =$
$(e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r)(\exp tN) = (e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r)$
$\times \{(\exp t(A - \lambda_1 E))\, P_1 + \cdots + (\exp t(A - \lambda_r E))\, P_r\} = (e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r)$
$\times \left\{ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (A - \lambda_1 E)^k P_1 + \cdots + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (A - \lambda_r E)^k P_r \right\} =$
$(e^{\lambda_1 t} P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} P_r) \left\{ \displaystyle\sum_{k=0}^{k_1 - 1} \frac{1}{k!} t^k (A - \lambda_1 E)^k P_1 + \cdots + \sum_{k=0}^{k_r - 1} \frac{1}{k!} t^k (A - \lambda_r E)^k P_r \right\}$
$= e^{\lambda_1 t} \displaystyle\sum_{k=0}^{k_1 - 1} \frac{1}{k!} t^k (A - \lambda_1 E)^k P_1 + \cdots + e^{\lambda_r t} \sum_{k=0}^{k_r - 1} \frac{1}{k!} t^k (A - \lambda_r E)^k P_r$ である．

§13 の ✍ のマーク

$\boxed{\text{p.144 上から 4 行目}}$ まず，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が 1 次従属のとき，ある $c \in \mathbf{C}$ が存在し，$\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} = c\boldsymbol{x}$ となる．よって，内積およびノルムの性質より，コーシー – シュワルツの不等式において，等号が成立する．次に，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のとき，コーシー – シュワルツの不等式において，等号が成立し，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は 1 次従属である．また，$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のとき，ノルムの正値性より，$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle > 0$ である．よって，コーシー – シュワルツの不等式において，等号が成立すると仮定すると，

(13.16) の計算より，$\left\langle \boldsymbol{x} - \frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle}\boldsymbol{y} \right\rangle = 0$ である．したがって，ノルムの正値性より，$\boldsymbol{x} - \frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は 1 次従属である．

§14 の ✍ のマーク

p.152 上から 5 行目　$(A+B)^* = A^* + B^*$　随伴行列の定義より，$(A+B)^*$ の (i,j) 成分 $= A+B$ の (j,i) 成分の共役 $= A$ の (j,i) 成分の共役 $+ B$ の (j,i) 成分の共役 $= A^*$ の (i,j) 成分 $+ B^*$ の (i,j) 成分である．よって，$(A+B)^* = A^* + B^*$ である．

$(AB)^* = B^*A^*$　A の列，B の行の個数を m とすると，随伴行列の定義より，$(AB)^*$ の (i,k) 成分 $= AB$ の (k,i) 成分の共役 $= \left\{ \sum_{j=1}^{m} (A \text{ の } (k,j) \text{ 成分}) \times (B \text{ の } (j,i) \text{ 成分}) \right\}$ の共役 $= \sum_{j=1}^{m} (B \text{ の } (j,i) \text{ 成分の共役}) \times (A \text{ の } (k,j) \text{ 成分の共役}) = \sum_{j=1}^{m} (B^* \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) \times (A^* \text{ の } (j,k) \text{ 成分}) = B^*A^*$ の (i,k) 成分である．よって，$(AB)^* = B^*A^*$ である．

$(cA)^* = \bar{c}A^*$　随伴行列の定義より，$(cA)^*$ の (i,j) 成分 $= cA$ の (j,i) 成分の共役 $= \bar{c} \times (A$ の (j,i) 成分の共役$) = \bar{c} \times (A^*$ の (i,j) 成分$)$ である．よって，$(cA)^* = \bar{c}A^*$ である．

p.153 上から 4 行目　$\|f(\boldsymbol{a}_j - i\boldsymbol{a}_k)\|^2 = \|\boldsymbol{a}_j - i\boldsymbol{a}_k\|^2 = \langle \boldsymbol{a}_j - i\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j - i\boldsymbol{a}_k\rangle = \langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j\rangle - \bar{i}\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k\rangle - i\langle \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j\rangle + i \cdot \bar{i}\langle \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k\rangle = 2$ である．

p.153 上から 10 行目　$\|f(\boldsymbol{a}_j - i\boldsymbol{a}_k)\|^2 = \|f(\boldsymbol{a}_j) - if(\boldsymbol{a}_k)\|^2 = \|f(\boldsymbol{a}_j)\|^2 - 2\,\mathrm{Im}\,\langle f(\boldsymbol{a}_j), f(\boldsymbol{a}_k)\rangle + \|f(\boldsymbol{a}_k)\|^2 = \|\boldsymbol{a}_j\|^2 - 2\,\mathrm{Im}\,\langle f(\boldsymbol{a}_j), f(\boldsymbol{a}_k)\rangle + \|\boldsymbol{a}_k\|^2 = 2 - 2\,\mathrm{Im}\,\langle f(\boldsymbol{a}_j), f(\boldsymbol{a}_k)\rangle$ である．

§15 の ✍ のマーク

p.159 下から 4 行目　定理 15.1 を n に関する数学的帰納法により示す．$n = 1$ のとき，1 次の複素正方行列は上三角行列であり，ユニタリ行列である単位行列によって上三角化される．よって，定理 15.1 がなりたつ．$n = k$（$k = 1, 2, \cdots$）のとき，定理 15.1 がなりたつと仮定する．このとき，$A \in M_{k+1}(\mathbf{C})$ とする．A の固有値 $\lambda_1 \in \mathbf{C}$ を 1 つ選んでおき，固有値 λ_1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ を 1 つ選んでおく．必要ならば，$\boldsymbol{p}_1$ を正規化しておくことに

より，$\|\boldsymbol{p}_1\| = 1$ であると仮定してよい．さらに，グラム – シュミットの直交化法（定理 14.1）より，$\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_{k+1} \in \mathbf{C}^{k+1}$ を $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_{k+1}$ が $\mathbf{C}^{k+1}$ の正規直交基底となるように選んでおくことができる．$P \in M_{k+1}(\mathbf{C})$ を $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_{k+1} \end{pmatrix}$ により定めると，$AP = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & A\boldsymbol{p}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & A\boldsymbol{p}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$ と表すことができる．ただし，$B \in M_k(\mathbf{C})$ である．P の列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_{k+1}$ は $\mathbf{C}^{k+1}$ の正規直交基底なので，定理 14.3 の (2) $\Leftrightarrow$(3) より，P はユニタリ行列であり，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$ となる．ここで，帰納法の仮定より，B はユニタリ行列によって上三角化可能である，すなわち，あるユニタリ行列 $Q \in M_k(\mathbf{C})$ および $\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_{k+1} \in \mathbf{C}$ が存在し，$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & * \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_{k+1} \end{pmatrix}$ となる．よって，$R = P \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix}$ とおくと，R はユニタリ行列であり，(2.7), (2.8) の計算より，A は R によって上三角化される．したがって，$n = k+1$ のとき，定理 15.1 がなりたつ．以上より，定理 15.1 がなりたつ．

§16 の ✍ のマーク

$\boxed{\text{p.172 （第 1 版は訂正後の）脚注}}$　まず，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W(\lambda)$ とすると，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \overline{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{y}} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ である．さらに，$c \in \mathbf{C}$ とすると，$f(c\boldsymbol{x}) = \overline{c\boldsymbol{x}} = \bar{c}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{c}f(\boldsymbol{x})$ である．よって，f は共役線形写像である［⇨ 正誤表参照］．

$\boxed{\text{p.174 上から 8 行目}}$　$l, m = 1, 2, \cdots, s$ とする．

$\{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{u}_1, \overline{\boldsymbol{u}_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_s, \overline{\boldsymbol{u}_s}\}$ は $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底なので，$\langle \boldsymbol{q}_{2l-1}, \boldsymbol{q}_{2m-1} \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_l + \overline{\boldsymbol{u}_l}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_m + \overline{\boldsymbol{u}_m}) \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{u}_m \rangle + \langle \boldsymbol{u}_l, \overline{\boldsymbol{u}_m} \rangle + \langle \overline{\boldsymbol{u}_l}, \boldsymbol{u}_m \rangle + \langle \overline{\boldsymbol{u}_l}, \overline{\boldsymbol{u}_m} \rangle\right)$
$= \frac{1}{2}(\delta_{lm} + 0 + 0 + \delta_{lm}) = \delta_{lm}$，$\langle \boldsymbol{q}_{2l-1}, \boldsymbol{q}_{2m} \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_l + \overline{\boldsymbol{u}_l}), \frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_m - \overline{\boldsymbol{u}_m}) \rangle =$
$-\frac{i}{2}\left(\langle \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{u}_m \rangle - \langle \boldsymbol{u}_l, \overline{\boldsymbol{u}_m} \rangle + \langle \overline{\boldsymbol{u}_l}, \boldsymbol{u}_m \rangle - \langle \overline{\boldsymbol{u}_l}, \overline{\boldsymbol{u}_m} \rangle\right)$
$= -\frac{i}{2}(\delta_{lm} - 0 - 0 - \delta_{lm}) = 0$，$\langle \boldsymbol{q}_{2l}, \boldsymbol{q}_{2m-1} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{q}_{2m-1}, \boldsymbol{q}_{2l} \rangle} = \bar{0} = 0$，$\langle \boldsymbol{q}_{2l}, \boldsymbol{q}_{2m} \rangle = \langle \frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_l - \overline{\boldsymbol{u}_l}), \frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_m - \overline{\boldsymbol{u}_m}) \rangle =$
$\frac{1}{2}\left(\langle \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{u}_m \rangle - \langle \boldsymbol{u}_l, \overline{\boldsymbol{u}_m} \rangle - \langle \overline{\boldsymbol{u}_l}, \boldsymbol{u}_m \rangle + \langle \overline{\boldsymbol{u}_l}, \overline{\boldsymbol{u}_m} \rangle\right) = \frac{1}{2}(\delta_{lm} - 0 - 0 + \delta_{lm}) = \delta_{lm}$ となる．よって，(16.11) がなりたつ．

p.175 下から 10 行目　A の成分はすべて実数であることに注意すると，A が直交行列によって対角化されることより，ある $P \in M_n(\mathbf{R})$ が存在し，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n \in \mathbf{R})$ となる．P は直交行列なので, $P^{-1} = {}^tP$ であることに注意し，上の式の両辺の転置行列を考えると，$P^{-1}{}^tAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となる．よって，$P^{-1}AP = P^{-1}{}^tAP$ となるので，${}^tA = A$ となり，A は対称行列である．

§17 の ✍ のマーク

p.185 下から 11 行目　$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}' \in \mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}' \in \mathbf{R}^n$，$c \in \mathbf{R}$ とする．

(1) の条件　$b_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = {}^t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')A\boldsymbol{y} = ({}^t\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{x}')A\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} + {}^t\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{y} = b_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b_A(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$ である．

(2) の条件　$b_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = {}^t\boldsymbol{x}A(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} + {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}' = b_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')$ である．

(3) の条件　まず, $b_A(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(c\boldsymbol{x})A\boldsymbol{y} = c{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = cb_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である．また, $b_A(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A(c\boldsymbol{y}) = c{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = cb_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である．

p.185 下から 4 行目　$f,\ g,\ h \in C[0,1]$，$c \in \mathbf{R}$ とする．

対称性　$b(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)f(t)\,dt = b(g,f)$ である．

線形性　まず，$b(f+g, h) = \displaystyle\int_0^1 (f+g)(t)h(t)\,dt = \int_0^1 (f(t)+g(t))\,h(t)\,dt = \int_0^1 (f(t)h(t)+g(t)h(t))\,dt = \int_0^1 f(t)h(t)\,dt + \int_0^1 g(t)h(t)\,dt = b(f,h) + b(g,h)$ である．また，$b(cf, g) = \displaystyle\int_0^1 (cf)(t)g(t)\,dt = \int_0^1 cf(t)g(t)\,dt = c\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = c(f,g)$ である．

正値性　まず, $b(f,f) = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^2\,dt \geq 0$ である．さらに, $b(f,f) = 0$ となるのは $f = 0$,

すなわち，任意の $t \in [0,1]$ に対して，$f(t)=0$ となるときに限る．

$\boxed{\text{p.186 下から 8 行目}}$　φ が線形同型写像であることを示す．ψ についても同様である．φ の定義より，φ は全単射なので，φ が線形写像であることを示せばよい．まず，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}' \in V$ とし，$x_1, x_2, \cdots, x_m \in \mathbf{R}$ を基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に関する $\boldsymbol{x}$ の成分，$x'_1, x'_2, \cdots, x'_m \in \mathbf{R}$ を基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に関する $\boldsymbol{x}'$ の成分とする．このとき，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = (x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m) + (x'_1\boldsymbol{a}_1 + x'_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x'_m\boldsymbol{a}_m) = (x_1+x'_1)\boldsymbol{a}_1 + (x_2+x'_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (x_m+x'_m)\boldsymbol{a}_m$ である．よって，基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に関する $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'$ の成分は $x_1+x'_1, x_2+x'_2, \cdots, x_m+x'_m$ である．したがって，$\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = \begin{pmatrix} x_1+x'_1 \\ x_2+x'_2 \\ \vdots \\ x_m+x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{x}')$ である．さらに，$c \in \mathbf{R}$ とすると，$c\boldsymbol{x} = c(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m) = cx_1\boldsymbol{a}_1 + cx_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + cx_m\boldsymbol{a}_m$ である．よって，基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に関する $c\boldsymbol{x}$ の成分は $cx_1, cx_2, \cdots, cx_m$ である．したがって，$\varphi(c\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_m \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = c\varphi(\boldsymbol{x})$ である．以上より，φ は線形写像である．

$\boxed{\text{p.187 下から 5 行目}}$　(17.6), (17.7) より，$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) =$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_m \end{pmatrix} {}^tPAQ \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}$$

となる．よって，基底 $\{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_m\}$, $\{\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2, \cdots, \boldsymbol{b}'_n\}$ に関する b の表現行列は ${}^tPAQ$ である．

$\boxed{\text{p.188 上から 3 行目}}$　標準基底に関する $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$ の成分は $x_1, x_2, \ldots, x_m$ である．よって，b_A の定義より，$\mathbf{R}^m$ および $\mathbf{R}^n$ の標準基底に関する b_A の表現行列は A である．

p.188 下から 6 行目　$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ とすると, $b_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = {}^t({}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{y}{}^tA\boldsymbol{x}$ であることに注意する．b_A が対称形式となるのは, 任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して, ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x}$ となるとき，すなわち，${}^t\boldsymbol{y}{}^tA\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x}$ より，${}^tA = A$ であり，A が対称行列のときである．

p.188 下から 5 行目　$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ とすると，$b_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = {}^t({}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{y}{}^tA\boldsymbol{x}$ であることに注意する．b_A が交代形式となるのは，任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して，${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = -{}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x}$ となるとき，すなわち，${}^t\boldsymbol{y}{}^tA\boldsymbol{x} = -{}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x}$ より，${}^tA = -A$ であり，A が交代行列のときである．

p.190 上から 2 行目　存在　まず，b は V 上の双 1 次形式なので，b_s, b_a は V 上の双 1 次形式を定める．ここで，$b_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\left(b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\right) = \frac{1}{2}\left(b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right) = b_s(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ である．よって，b_s は V 上の対称形式を定める．また，$b_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\left(b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\right) = -\frac{1}{2}\left(b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right) = -b_a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ である．よって，b_a は V 上の交代形式を定める．さらに，$b_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ なので，$b = b_s + b_a$ である．

一意性　b_s, b'_s を V 上の対称形式, b_a, b'_a を V 上の交代形式とし, $b = b_s + b_a = b'_s + b'_a$ がなりたつとする．このとき，$b_s - b'_s = b'_a - b_a$ である．$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in V$ とすると，b_s, b'_s は対称形式，b_a, b'_a は交代形式であることより，$b_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - b'_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b_s(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - b'_s(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = b'_a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - b_a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -b'_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -b_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b'_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となる．よって，$2b_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2b'_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ より，$b_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b'_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となり，$b_s = b'_s$ である．さらに，$0 = b_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - b'_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b'_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - b_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ より，$b_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = b'_a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となり，$b_a = b'_a$ である．

p.191 上から 8 行目　A の正の固有値に対する 1 次独立な固有ベクトルを P の第 1 列から第 r 列，A の負の固有値に対する 1 次独立な固有ベクトルを P の第 $(r+1)$ 列から第 $(r+s)$ 列，A の固有値 0 に対する 1 次独立な固有ベクトルを P の第 $(r+s+1)$ 列から第 n 列に並べればよい．

p.191 下から 1 行目　Step 1　V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を 1 つ選んでおく．A を基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ に関する b の表現行列とすると，b は交代形式なので，例 17.4 より，A は交代行列である．よって，定理 16.4 より，ある直交行列 $P \in M_n(\mathbf{R})$ が存在し，直交行列に対する条件 ${}^tP = P^{-1}$ を用いて，${}^tPAP = P^{-1}AP =$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \text{\Large 0} & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & -b_1 & & & & \\ & & & b_1 & 0 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & \text{\Large 0} & & & & & 0 & -b_s \\ & & & & & & b_s & 0 \end{pmatrix}$$

$(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_s \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ と表される．

$\boxed{\text{Step 2}}$　V の基底 $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n\}$ を $\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots, & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} P$ により定める．このとき，17・2 の議論において，$P = Q$ とおくことにより，基底 $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n\}$ に関する b の表現行列は上のようになる．

$\boxed{\text{Step 3}}$　ここで，必要ならば，P の列ベクトルの順序を入れ替えることにより，$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r > 0$ とし，${}^tPAP = \begin{pmatrix} O & B & O \\ -B & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & b_s \end{pmatrix}$ としてよい．このとき，V の基底 $\{\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}_n\}$ を $\boldsymbol{c}_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b_i}}\boldsymbol{b}_i & (i = 1,\ \cdots,\ s), \\ \dfrac{1}{\sqrt{b_i}}\boldsymbol{b}_i & (i = s+1,\ \cdots,\ 2s), \\ \boldsymbol{b}_i & (i = 2s+1,\ \cdots,\ n) \end{cases}$ とおくと，基底 $\{\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}_n\}$ に関する b の表現行列は (17.22) となる．

§18 の ✍ のマーク

$\boxed{\text{p.196 上から 10 行目}}$　$q(c\boldsymbol{x}) = b(c\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{x}) = c^2 b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = c^2 q(\boldsymbol{x})$ である．

$\boxed{\text{p.196 上から 11 行目}}$　$q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{x}) - q(\boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である．

§19 の ✍ のマーク

p.209 上から 9 行目　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ とする．直交行列はノルムを保つことに注意すると，$d\left(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\right) = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = \|A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} - (A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b})\| = \|A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である．よって，f は等長変換である．

p.209 上から 11 行目　(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ とすると，f は等長変換なので，$d\left(g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})\right) = \|g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})\| = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0}) - (f(\boldsymbol{y}) - f(\mathbf{0}))\| = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = d\left(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\right) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である．よって，g は等長変換である．

(2) $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ とすると，f は等長変換なので，$\|g(\boldsymbol{x})\| = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0})\| = d(f(\boldsymbol{x}), f(\mathbf{0})) = d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = \|\boldsymbol{x} - \mathbf{0}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ である．よって，g はノルムを保つ．

(3) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ とすると，(2) より，$\left(d\left(g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})\right)\right)^2 = \|g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})\|^2 = \langle g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})\rangle = \langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\rangle - \langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})\rangle - \langle g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x})\rangle + \langle g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{y})\rangle = \|g(\boldsymbol{x})\|^2 - 2\langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})\rangle + \|g(\boldsymbol{y})\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2$ である．同様に，$(d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2$ である．さらに，(1) より，$\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2$ である．よって，$\langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ となり，g は標準内積を保つ．

(4) まず，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ とすると，(3) より，
$\langle g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})\rangle = \langle g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\rangle - \langle g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x})\rangle - \langle g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{y})\rangle - \langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\rangle + \langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\rangle + \langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})\rangle - \langle g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\rangle + \langle g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x})\rangle + \langle g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{y})\rangle = \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$ である．
よって，内積の正値性より，$g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$，すなわち，$g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{y})$ である．さらに，$c \in \mathbf{R}$ とすると，(3) より，$\langle g(c\boldsymbol{x}) - cg(\boldsymbol{x}), g(c\boldsymbol{x}) - cg(\boldsymbol{x})\rangle = \langle g(c\boldsymbol{x}), g(c\boldsymbol{x})\rangle - c\langle g(c\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\rangle - c\langle g(\boldsymbol{x}), g(c\boldsymbol{x})\rangle + c^2\langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\rangle = \langle c\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{x}\rangle - c\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - c\langle \boldsymbol{x}, c\boldsymbol{x}\rangle + c^2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ である．よって，内積の正値性より，$g(c\boldsymbol{x}) - cg(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$，すなわち，$g(c\boldsymbol{x}) = cg(\boldsymbol{x})$ である．したがって，g は線形変換である．

(5) (2) と (4) または (3) と (4) より，A は直交行列である．

p.210 下から 6 行目　1 次の直交行列とは 2 次方程式 $x^2 = 1$ をみたす $x \in \mathbf{R}$ のことである．すなわち，$x = \pm 1$ である．

p.210 下から 2 行目　直交行列の各列ベクトルは正規直交基底となることに注意する．まず，A の第 1 列のノルムは 1 である．よって，A の第 1 列は (19.19) のように表される．さらに，A の第 2 列は A の第 1 列と直交するノルムが 1 のベクトルである．したがって，A の第 2 列は (19.19) のように表される．

p.212 下から 1 行目　$|A| = |P^{-1}AP| = |E_q||-E_r||R(\theta_1)|\cdots|R(\theta_s)| = 1\cdot(-1)^r\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{s\text{ 個}} = (-1)^r$ である．よって，$\|A\| = 1$ のとき，r は偶数である．

p.213 脚注　(19.15) より，$\boldsymbol{x} = A^{-1}f(\boldsymbol{x}) - A^{-1}\boldsymbol{b}$ である．よって，$f^{-1}(\boldsymbol{y}) = A^{-1}\boldsymbol{y} - A^{-1}\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$）である．ここで，$-A^{-1}\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$ であり，A は直交行列なので，A^{-1} も直交行列である．よって，定理 19.1 より，f^{-1} も等長変換である．

§ 20 の ✍ のマーク

p.223 下から 9 行目　$\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{1}{p}\begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ b'_{r+2} \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$ とおくと，$\|\boldsymbol{b}_1\| = 1$ である．よって，$\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ を選んでおくことができる．さらに，直交行列 $Q\in M_n(\mathbf{R})$ を $Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ により定めることができる．このとき，$P' = Q^{-1}$ とおくと，P' は直交行列であり，$P'(pQ) = pE$ となる．この式の両辺の第 1 列より，(20.31) が得られる．

p.223 下から 7 行目　(20.31) の両辺の転置行列を考えると，$\begin{pmatrix} b'_{r+1} & b'_{r+2} & \cdots & b'_n \end{pmatrix}{}^tP' = \begin{pmatrix} p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ である．ここで，P' は直交行列なので，$(P')^{-1} = {}^tP'$ である．よって，上の式の両辺に右から P' をかけると，(20.32) が得られる．

§ 21 の ✍ のマーク

p.235 下から 5 行目　$(f(\boldsymbol{a}_1)f_1 + f(\boldsymbol{a}_2)f_2 + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)f_n)(\boldsymbol{a}_j) = f(\boldsymbol{a}_1)f_1(\boldsymbol{a}_j) + f(\boldsymbol{a}_2)f_2(\boldsymbol{a}_j) + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)f_n(\boldsymbol{a}_j) = f(\boldsymbol{a}_1)\delta_{1j} + f(\boldsymbol{a}_2)\delta_{2j} + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)\delta_{nj} = f(\boldsymbol{a}_j)$ である．

p.236 上から 11 行目　まず，$(\iota(\boldsymbol{x}))(f+g)=(f+g)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})=(\iota(\boldsymbol{x}))(f)+(\iota(\boldsymbol{x}))(g)$ である．また，$(\iota(\boldsymbol{x}))(cf)=(cf)(\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x})=c(\iota(\boldsymbol{x}))(f)$ である．

p.236 下から 7 行目　まず，$f\in V^*$ とすると，$(\iota(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))(f)=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})=(\iota(\boldsymbol{x}))(f)+(\iota(\boldsymbol{y}))(f)=(\iota(\boldsymbol{x})+\iota(\boldsymbol{y}))(f)$ である．よって，(21.18) がなりたつ．また，$(\iota(c\boldsymbol{x}))(f)=f(c\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x})=c(\iota(\boldsymbol{x}))(f)=(c\iota(\boldsymbol{x}))(f)$ である．よって，(21.19) がなりたつ．

p.237 下から 6 行目　まず，$(\varphi^*(f))(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))=f(\varphi(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y}))=f(\varphi(\boldsymbol{x}))+f(\varphi(\boldsymbol{y}))=(\varphi^*(f))(\boldsymbol{x})+(\varphi^*(f))(\boldsymbol{y})$ である．また，$(\varphi^*(f))(c\boldsymbol{x})=f(\varphi(c\boldsymbol{x}))=f(c\varphi(\boldsymbol{x}))=cf(\varphi(\boldsymbol{x}))=c(\varphi^*(f))(\boldsymbol{x})$ である．

p.237 下から 1 行目　まず，$\boldsymbol{x}\in V$ とすると，$(\varphi^*(f+g))(\boldsymbol{x})=(f+g)(\varphi(\boldsymbol{x}))=f(\varphi(\boldsymbol{x}))+g(\varphi(\boldsymbol{x}))=(\varphi^*(f))(\boldsymbol{x})+(\varphi^*(g))(\boldsymbol{x})=(\varphi^*(f)+\varphi^*(g))(\boldsymbol{x})$ である．よって，(21.24) がなりたつ．また，$(\varphi^*(cf))(\boldsymbol{x})=(cf)(\varphi(\boldsymbol{x}))=cf(\varphi(\boldsymbol{x}))=c(\varphi^*f)(\boldsymbol{x})=(c\varphi^*f)(\boldsymbol{x})$ である．よって，(21.25) がなりたつ．

§22 の ✍ のマーク

p.243 下から 7 行目　反射律　$a\in X$ とすると，$a\in X$ より，$a\sim a$ である．よって，$\sim$ は反射律をみたす．

対称律　$a,\,b\in X$，$a\sim b$ とすると，$a,\,b\in X$ より，$b\sim a$ である．よって，$\sim$ は対称律をみたす．

推移律　$a,\,b,\,c\in X$，$a\sim b$，$b\sim c$ とすると，$a,\,c\in X$ より，$a\sim c$ である．よって，$\sim$ は推移律をみたす．

p.243 下から 4 行目　反射律　$a\in X$ とすると，$a=a$ より，$a\sim a$ である．よって，$\sim$ は反射律をみたす．

対称律　$a,\,b\in X$，$a\sim b$ とすると，$a=b$ である．よって，$b=a$ となり，$b\sim a$ である．したがって，$\sim$ は対称律をみたす．

推移律　$a,\,b,\,c\in X$，$a\sim b$，$b\sim c$ とすると，$a=b$，$a=c$ である．よって，$a=c$ となり，$a\sim c$ である．したがって，$\sim$ は推移律をみたす．

p.245 下から 1 行目　商集合の定義より，$X/\sim$ の任意の元はある $x\in X$ を用いて $C(x)$

と表される．よって，$C(x)=\pi(x)$ となり，π は全射である．

p.248 下から 2 行目　(1) $[\boldsymbol{x}]+[\boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}]=[\boldsymbol{y}]+[\boldsymbol{x}]$ である．
(2) $([\boldsymbol{x}]+[\boldsymbol{y}])+[\boldsymbol{z}]=[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}]+[\boldsymbol{z}]=[(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}]=[\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})]=[\boldsymbol{x}]+[\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}]=[\boldsymbol{x}]+([\boldsymbol{y}]+[\boldsymbol{z}])$ である．
(3) まず，(1) より，$[\boldsymbol{x}]+[\boldsymbol{0}]=[\boldsymbol{0}]+[\boldsymbol{x}]$ である．さらに，$[\boldsymbol{0}]+[\boldsymbol{x}]=[\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}]=[\boldsymbol{x}]$ である．
(4) $c\,(d[\boldsymbol{x}])=c[d\boldsymbol{x}]=[c(d\boldsymbol{x})]=[(cd)\boldsymbol{x}]=(cd)[\boldsymbol{x}]$ である．
(5) $(c+d)[\boldsymbol{x}]=[(c+d)\boldsymbol{x}]=[c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}]=[c\boldsymbol{x}]+[d\boldsymbol{x}]=c[\boldsymbol{x}]+d[\boldsymbol{x}]$ である．
(6) $c\,([\boldsymbol{x}]+[\boldsymbol{y}])=c[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}]=[c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})]=[c\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y}]=[c\boldsymbol{x}]+[c\boldsymbol{y}]=c[\boldsymbol{x}]+c[\boldsymbol{y}]$ である．
(7) $1[\boldsymbol{x}]=[1\boldsymbol{x}]=[\boldsymbol{x}]$ である．
(8) $0[\boldsymbol{x}]=[0\boldsymbol{x}]=[\boldsymbol{0}]$ である．

§23 の ✍ のマーク

p.255 上から 8 行目　$X,\ X'\in M_{l,m}(\mathbf{R})$，$Y,\ Y'\in M_{m,n}(\mathbf{R})$，$c\in\mathbf{R}$ とする．

(1) の条件　$\Phi(X+X',Y)=(X+X')Y=XY+X'Y=\Phi(X,Y)+\Phi(X',Y)$ である．

(2) の条件　$\Phi(X,Y+Y')=X(Y+Y')=XY+XY'=\Phi(X,Y)+\Phi(X,Y')$ である．

(3) の条件　まず, $\Phi(cX,Y)=(cX)Y=X(cY)=\Phi(X,cY)$ である．さらに, $\Phi(X,cY)=X(cY)=c(XY)=c\Phi(X,Y)$ である．

p.258 上から 3 行目　$\varphi,\ \psi,\ \rho\in\mathrm{Hom}\,(V,W)$，$c,\ d\in\mathbf{R}$ とし，$\boldsymbol{0}\in\mathrm{Hom}\,(V,W)$ を零写像とする．次の (1)〜(8) がなりたつことを示せばよい．
(1) $\varphi+\psi=\psi+\varphi$.
(2) $(\varphi+\psi)+\rho=\varphi+(\psi+\rho)$.
(3) $\varphi+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\varphi=\varphi$.
(4) $c(d\varphi)=(cd)\varphi$.
(5) $(c+d)\varphi=c\varphi+d\varphi$.
(6) $c(\varphi+\psi)=c\varphi+c\psi$.
(7) $1\varphi=\varphi$.
(8) $0\varphi=\boldsymbol{0}$.

(1) $\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(\varphi+\psi)(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{x}) = (\psi+\varphi)(\boldsymbol{x})$ である．よって，(1) がなりたつ．

(2) $\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$((\varphi+\psi)+\rho)(\boldsymbol{x}) = (\varphi+\psi)(\boldsymbol{x}) + \rho(\boldsymbol{x}) = (\varphi(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x})) + \rho(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + (\psi(\boldsymbol{x}) + \rho(\boldsymbol{x})) = \varphi(\boldsymbol{x}) + (\psi+\rho)(\boldsymbol{x}) = (\varphi + (\psi+\rho))(\boldsymbol{x})$ である．よって，(2) がなりたつ．

(3) まず，(1) より，$\varphi + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \varphi$ である．さらに，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(\mathbf{0}+\varphi)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W + \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$ である．ただし，$\mathbf{0}_W$ は W の零ベクトルである．よって，(3) がなりたつ．

(4) $\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(c(d\varphi))(\boldsymbol{x}) = c(d\varphi)(\boldsymbol{x}) = c(d\varphi(\boldsymbol{x})) = (cd)(\varphi(\boldsymbol{x})) = ((cd)\varphi)(\boldsymbol{x})$ である．よって，(4) がなりたつ．

(5) $\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$((c+d)\varphi)(\boldsymbol{x}) = (c+d)\varphi(\boldsymbol{x}) = c\varphi(\boldsymbol{x}) + d\varphi(\boldsymbol{x}) = (c\varphi)(\boldsymbol{x}) + (d\varphi)(\boldsymbol{x}) = (c\varphi + d\varphi)(\boldsymbol{x})$ である．よって，(5) がなりたつ．

(6) $\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(c(\varphi+\psi))(\boldsymbol{x}) = c(\varphi+\psi)(\boldsymbol{x}) = c(\varphi(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x})) = c\varphi(\boldsymbol{x}) + c\psi(\boldsymbol{x}) = (c\varphi)(\boldsymbol{x}) + (c\psi)(\boldsymbol{x}) = (c\varphi + c\psi)(\boldsymbol{x})$ である．よって，(6) がなりたつ．

(7) $\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(1\varphi)(\boldsymbol{x}) = 1\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$ である．よって，(7) がなりたつ．

(8) $\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(0\varphi)(\boldsymbol{x}) = 0\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W = \mathbf{0}(\boldsymbol{x})$ である．よって，(8) がなりたつ．

p.258 上から 7 行目　まず，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$ とすると，$(\Phi(f,\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{y}) = \big(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')\big)\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} + f(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{y}) = (\Phi(f,\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}) + (\Phi(f,\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}')$ である．さらに，$c \in \mathbf{R}$ とすると，$(\Phi(f,\boldsymbol{y}))(c\boldsymbol{x}) = f(c\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = cf(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = c(\Phi(f,\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x})$ である．よって，$(\Phi(f,\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x})$ は $\Phi(f,\boldsymbol{y}) \in \mathrm{Hom}(V,W)$ を定める．

p.258 上から 9 行目　定義23.1の(1)〜(3)の条件を確かめればよい．$f,\ f' \in V^*, y,\ y' \in W$，$c \in \mathbf{R}$ とする．

(1) の条件　$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$\big(\Phi(f+f',\boldsymbol{y})\big)(\boldsymbol{x}) = (f+f')(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \big(f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x})\big)\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} + f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \Phi(f,\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}) + \Phi(f',\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}) = \big(\Phi(f,\boldsymbol{y}) + \Phi(f',\boldsymbol{y})\big)(\boldsymbol{x})$ である．よって，$\Phi(f+f',\boldsymbol{y}) = \Phi(f,\boldsymbol{y}) + \Phi(f',\boldsymbol{y})$ となり，(1) の条件がなりたつ．

(2) の条件　$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$\big(\Phi(f,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}')\big)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} + f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}' = \Phi(f,\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}) + \Phi(f,\boldsymbol{y}')(\boldsymbol{x}) = \big(\Phi(f,\boldsymbol{y}) + \Phi(f,\boldsymbol{y}')\big)(\boldsymbol{x})$ である．よって，$\Phi(f,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = \Phi(f,\boldsymbol{y}) + \Phi(f,\boldsymbol{y}')$ となり，(2) の条件がなりたつ．

(3) の条件　まず，$\boldsymbol{x} \in V$ とすると，$(\Phi(cf,\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}) = (cf)(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = cf(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})(c\boldsymbol{y}) = (\Phi(f,c\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x})$ である．よって，$\Phi(cf,\boldsymbol{y}) = \Phi(f,c\boldsymbol{y})$ である．さらに，$(\Phi(f,c\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}) = c(\Phi(f,\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}) = (c\Phi(f,\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x})$ である．したがって，$\Phi(f,c\boldsymbol{y}) = c\Phi(f,\boldsymbol{y})$ である．以上より，(3) の条件がなりたつ．

p.259 上から 7 行目　定義23.1の (1)〜(3) の条件を確かめればよい．$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}' \in V$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}' \in W$，$c \in \mathbf{R}$ とする．

(1) の条件　$f \in V^*$，$g \in W^*$ とすると，$\big(\iota(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})\big)(f, g) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')g(\boldsymbol{y}) = \big(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')\big)\, g(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{x}')g(\boldsymbol{y}) = (\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\,(f, g) + \big(\iota(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})\big)\,(f, g) = \big(\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \iota(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})\big)\,(f, g)$ である．よって，$\iota(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = \iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \iota(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$ となり，(1) の条件がなりたつ．

(2) の条件　$f \in V^*$，$g \in W^*$ とすると，$\big(\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}')\big)(f, g) = f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = f(\boldsymbol{x})\,\big(g(\boldsymbol{y}) + g(\boldsymbol{y}')\big) = f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y}') = (\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\,(f, g) + \big(\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')\big)\,(f, g) = \big(\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')\big)\,(f, g)$ である．よって，$\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = \iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')$ となり，(2) の条件がなりたつ．

(3) の条件　まず, $f \in V^*$, $g \in W^*$ とすると, $(\iota(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\,(f, g) = f(c\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y}) = cf(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})\,(cg(\boldsymbol{y})) = f(\boldsymbol{x})g(c\boldsymbol{y}) = (\iota(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}))\,(f, g)$ である．よって，$\iota(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \iota(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y})$ である．さらに，$(\iota(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}))\,(f, g) = cf(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y}) = c\,(\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\,(f, g) = (c\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\,(f, g)$ である．したがって，$\iota(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = c\iota(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である．以上より，(3) の条件がなりたつ．

p.261 上から 3 行目（第 1 版）　「手のマーク」の付いた文を削除する［⇨ 正誤表参照］．

§ 24 の ✍ のマーク

p.272 下から 8 行目　次の部分空間の条件 (1)〜(3) を示せばよい．

(1) $\mathbf{0} \in \mathcal{S}^p(V)$．ただし，$\mathbf{0}$ は $T^p(V)$ の零ベクトルである．

(2) s, $t \in \mathcal{S}^p(V)$ ならば，$s + t \in \mathcal{S}^p(V)$．

(3) $c \in \mathbf{R}$，$t \in \mathcal{S}^p(V)$ ならば，$ct \in \mathcal{S}^p(V)$．

(1) 明らかである．

(2) s, $t \in \mathcal{S}^p(V)$，$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ とすると，$P_\sigma(s+t) = P_\sigma(s) + P_\sigma(t) = s + t$ である．よって，$s + t \in \mathcal{S}^p(V)$ である．

(3) $c \in \mathbf{R}$，$t \in \mathcal{S}^p(V)$，$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ とすると，$P_\sigma(ct) = cP_\sigma(t) = ct$ である．よって，$ct \in \mathcal{S}^p(V)$ である．

p.274 上から 5 行目　次の部分空間の条件 (1)〜(3) を示せばよい．

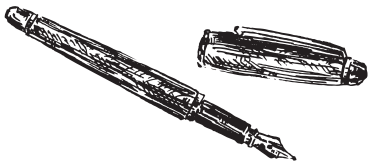
(1) $\mathbf{0} \in \mathcal{A}^p(V)$．ただし，$\mathbf{0}$ は $T^p(V)$ の零ベクトルである．

(2) s, $t \in \mathcal{A}^p(V)$ ならば，$s + t \in \mathcal{A}^p(V)$．

(3) $c \in \mathbf{R}$，$t \in \mathcal{A}^p(V)$ ならば，$ct \in \mathcal{A}^p(V)$．

(1) 明らかである．

(2) $s,\ t \in \mathcal{A}^p(V)$，$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ とすると，$P_\sigma(s+t) = P_\sigma(s) + P_\sigma(t) = (\operatorname{sgn}\sigma)s + (\operatorname{sgn}\sigma)t = (\operatorname{sgn}\sigma)(s+t)$ である．よって，$s+t \in \mathcal{A}^p(V)$ である．

(3) $c \in \mathbf{R}$，$t \in \mathcal{A}^p(V)$，$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ とすると，$P_\sigma(ct) = cP_\sigma(t) = c\left((\operatorname{sgn}\sigma)t\right) = (\operatorname{sgn}\sigma)(ct)$ である．よって，$ct \in \mathcal{A}^p(V)$ である．

（お疲れさまでした）【終】