詳細解答

- この別冊 PDF ファイルは『**手を動かしてまなぶ　基礎数学**』（裳華房，2024 年刊）の**節末問題の詳細解答**です．書籍を読み進む際に活用すると効果的です．
- この別冊 PDF ファイルを印刷して利用するときは，**「小冊子」モード**で印刷して二つ折にすると，A5 判サイズで本の巻末に挟み込んで利用することができます．

(2024 年 10 月 31 日版)

§1 の問題解答

解 1.1　(1) 画数が多いか少ないかは主観によるものだから，命題ではない．

(2) 画数が全 25 画であるかどうかは，客観的に判断できるから，命題である．また，「愛媛」は全 25 画であるから，真である．

(3) 等式が成り立つかどうかは客観的に判断できるから，命題である．しかし，$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ は a, b が複素数でも成り立つから，偽である．

(4) 簡単かどうかは主観による判断になるので，命題ではない．

(5) 芸術が爆発であるかは主観によるので，命題ではない．

解 1.2　(1) -1 は A の要素ではないので，正しくない．

(2) $\{0\}$ は A の要素ではないので，正しくない．

(3) $0, 1$ はどちらも A の要素であるので，正しい．

(4) A は $\{\emptyset\}$ を要素に持つが，集合 $\{0, 1, 2, \{1, 0\}, \{0, 1, 2\}\}$ は $\{\emptyset\}$ を要素に持たないので，正しくない．

(5) 2 は集合でないので，正しくない．

(6) $\{1\}$ は A の要素ではないので，正しくない．

(7) $\{\{1\}\}$ は A の要素ではないので，正しくない．

(8) $\emptyset$ は A の要素ではないので，正しくない（**注**：空集合を要素にもつ集合は A の部分集合であるかを問われているため）．

解 1.3　(1) $B = \{0, 1, 3\}$

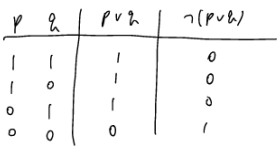
(2) $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{0, 1, 3\}$ より，$A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 7\}$

(3) $\overline{A} = \{0, 2, 6\}, B = \{0, 1, 3\}$ より，$\overline{A} \cap B = \{0\}$

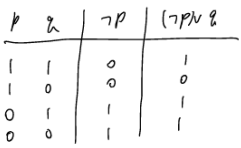
(4) $A \cap B = \{1, 3\}$ より，$\overline{A \cap B} = \{0, 2, 5, 6, 7\}$

§2 の問題解答

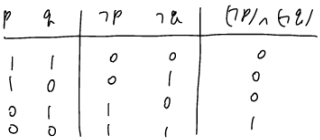
解 2.1　(1)



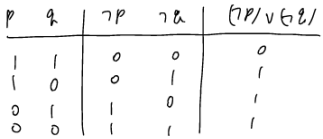
(2)



(3)



(4)



解 2.2　(i) $n=1$ のとき，$1^2=1$ だから，命題成立.

(ii) $n=k$(ただし, k は自然数)のとき、1 から $2k-1$ までのすべての奇数の和が k^2 であると仮定すると, $\sum_{l=1}^{k}(2l-1)=k^2$ が成り立つ. よって, $n=k+1$ のとき, 1 から $2(k+1)-1$ までのすべての奇数の和は, $\sum_{l=1}^{k+1}(2l-1)=2(k+1)-1+\sum_{l=1}^{k}(2l-1)=2k+1+k^2=(k+1)^2$ より，命題成立.

(i), (ii) より，すべての自然数 n で命題成立.

解 2.3　(1)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

(2)

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee r$	$(\neg(p \wedge q)) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0

(3)

p	q	r	$p \vee r$	$\neg(p \vee r)$	$\neg q$	$(\neg(p \vee r)) \wedge (\neg q)$	$\neg r$	$q \vee (\neg r)$	$(\neg(p \vee r)) \wedge (\neg q) \wedge (q \vee (\neg r))$
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

解 2.4　① m^2, ② m, ③ $m = 2k$, ④ $n^2 = 2k^2$, ⑤ 既約分数

§3 の問題解答

解 3.1　単項式　x^2y（次数 3），-1（次数 0）

多項式　$2ab+1$(次数2), $2a^2b^3c+3a^2b^2$(次数6), $-x^2y^2+y^2z^2$(次数4), $5y+zx-1$（次数 2），$-3x+1$（次数 1）

解 3.2　(1) $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$

(2) $(x+3)(x+5) = x^2 + 8x + 15$

(3) $(-x+1)(2x+3) = -2x^2 - x + 3$

(4) $(2x+3)(3x-1) = 6x^2 + 7x - 3$

(5) $(-3x+2)(4x+5) = -12x^2 - 7x + 10$

(6) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

(7) $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

(8) $(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

(9) $(2x+1)(2x-1) = 4x^2 - 1$

(10) $(2x+3)^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

(11) $(4x-1)^3 = 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$

解 3.3　(1) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

(2) $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$

(3) $2x^2 - 5x - 3 = (2x+1)(x-3)$

(4) $-x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2)$

(5) $6x^2 + 13x - 5 = (3x-1)(2x+5)$

(6) $4x^2 + 4x - 3 = (2x-1)(2x+3)$

(7) $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$

(8) $-9x^2 + 1 = -(3x-1)(3x+1)$

(9) $3x^2 + 16x + 13 = (3x+13)(x+1)$

解 3.4　(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}(2k+1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 + 50 = 2600$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(2k^2 - k + 1) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 + 100 = 671750$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2 \cdot \sum_{k=1}^{10} 2^{k-1} = 2 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2046$

(4) $\displaystyle\prod_{k=1}^{5}(2k) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 3840$

解 3.5　(1) $(2+3i) + (1+6i) = 3 + 9i$

(2) $(1+2i) + (-2+4i) = -1 + 6i$

(3) $(-1+3i) - (-1-2i) = 5i$

(4) $\overline{1+i} + (2-i) = 1 - i + 2 - i = 3 - 2i$

(5) $(2+i)(1-i) = 2 - i - i^2 = 2 - i + 1 = 3 - i$

(6) $(2-3i)(3+2i) = 6 - 5i - 6i^2 = 6 - 5i + 6 = 12 - 5i$

(7) $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-2i}{2} = -i$

(8) $\dfrac{2+2i}{3-i}=\dfrac{2(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{2(2+4i)}{10}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{5}i$

(9) $\dfrac{2-i}{\overline{2+3i}}=\dfrac{2-i}{2-3i}=\dfrac{(2-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{7+4i}{13}=\dfrac{7}{13}+\dfrac{4}{13}i$

(10) $\dfrac{4+3i}{1-2i}+\dfrac{2}{3i}=\dfrac{(4+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}+\dfrac{2i}{3i^2}=\dfrac{-2+11i}{5}-\dfrac{2}{3}i=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{23}{15}i$

解 3.6 (1) $(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+3x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$

(2) $(2x-1)(x+2)(-x+2)=(2x-1)(-x^2+4)=-2x^3+x^2+8x-4$

(3) $(x^2+x+1)(x+2)=x^3+3x^2+3x+2$

(4) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=((x^2+2)+2x)((x^2+2)-2x)=(x^2+2)^2-4x^2=x^4+4x^2+4-4x^2=x^4+4$

解 3.7 (1) 因数定理より，$x+2$ を因数に持つことがわかるから，$x^3+6x^2+12x+8=(x+2)(x^2+4x+4)=(x+2)^3$

(2) 因数定理より，$x+1$ を因数に持つことがわかるから，$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)$

(3) 因数定理より，$x+1$ を因数に持つことがわかるから，$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x^2-2x+1)=(x+1)(x-1)^2$（$x-1$ も因数に持つため，$x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)$ として考えてもよい）

(4) 因数定理より，$x+1$ を因数に持つことがわかるから，$x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)=(x+1)(x+1)(x-2)=(x+1)^2(x-2)$（$x-2$ も因数に持つため，$x^3-3x-2=(x-2)(x^2+2x+1)$ として考えてもよい）

(5) 因数定理より，$x+3$ を因数に持つことがわかるから，$4x^3+12x^2-x-3=(x+3)(4x^2-1)=(x+3)(2x-1)(2x+1)$（最初に 4 でくくって，$x-\dfrac{1}{2}$ または $x+\dfrac{1}{2}$ を因数に持つと考えて計算してもよい．ただし，因数分解後にくくった $4(=2\times 2)$ を掛けて分数を整数にする処理をすること）

(6) 因数定理より，$x-3$ を因数に持つことがわかるから，$2x^3+3x^2-23x-12=(x-3)(2x^2+9x+4)=(x-3)(x+4)(2x+1)$（$x+4$ も因数に持つため，$2x^3+3x^2-23x-12=(x+4)(2x^2-5x-3)$ として考えてもよい．また，(5) の別解のように，最初に 2 でくくって考えてもよい）

(7) 因数定理より，$x-1$ を因数に持つことがわかるから，$x^4-6x^3+7x^2+6x-8=(x-1)(x^3-5x^2+2x+8)$．$x^3-5x^2+2x+8$ は，$x+11$ を因数に持つことがわかるから，$(x-1)(x^3-5x^2+2x+8)=(x-1)(x+1)(x^2-6x+8)=(x-1)(x+1)(x-2)(x-4)$（$x+1, x-2, x-4$ も因数に持つため，最初にこれらを使って因数分解してもよい）

(8) $x^4-1=(x^2)^2-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$（$x-1, x+1$ を因数に持つことを利用して計算してもよい）

§4 の問題解答

解 4.1 (1) $3!=3\cdot2\cdot1=6$

(2) $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(3) $10!=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=3628800$

(4) ${}_3P_2=3\cdot2=6$

(5) ${}_8P_3=8\cdot7\cdot6=336$

(6) ${}_{11}P_5=11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7=55440$

(7) ${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

(8) ${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

(9) ${}_{12}C_3=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220$

解 4.2 100 の桁から順に 1 枚ずつカードを選べばよいから，100 の桁は 8 通り，10 の桁は 7 通り，1 の桁は 6 通りより，${}_8P_3=336$．よって，336 通り．

解 4.3 400 人から 3 人を選ぶ選び方は, 選ぶ順によらないから, ${}_{40}C_3=\dfrac{40\cdot39\cdot38}{3\cdot2\cdot1}=9880$ より，9880 通り．

解 4.4 (1) $(x+2y)^4={}_4C_0x^4(2y)^0+{}_4C_1x^3(2y)^1+{}_4C_2x^2(2y)^2+{}_4C_3x^1(2y)^3+{}_4C_4x^0(2y)^4=x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$

(2) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(3) $(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a^2+2ab+b^2)c+3(a+b)c^2+c^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$

解 4.5 (1) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3=x^3+3x^2\cdot(-3y)+3x\cdot(-3y)^2+(-3y)^3=(x-3y)^3$

(2) $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca=a^2+(-b)^2+(2c)^2+2a\cdot(-b)+2(-b)\cdot(2c)+2(2c)\cdot a=(a-b+2c)^2$

§5 の問題解答

解 5.1 (1) (i) 2 ずつ増えているから，等差数列

(ii) $a_k = a_{k-1} + 2, a_1 = 3$

(iii) $a_k = 3 + (k-1) \times 2 = 2k + 1$

(iv) $S_n = \dfrac{1}{2}n(2 \times 3 + (n-1) \times 2) = n(n+2)$，または，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n = n(n+2)$

(2) (i) 2 倍ずつ増えているから，等比数列

(ii) $a_k = 2a_{k-1}, a_1 = 1$

(iii) $a_k = 1 \cdot 2^{k-1} = 2^{k-1}$

(iv) $S_n = \dfrac{1 \cdot (1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1$，または，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$

(3) (i) -2 倍ずつ増えているから，等比数列

(ii) $a_k = -2a_{k-1}, a_1 = -3$

(iii) $a_k = -3 \cdot (-2)^{k-1}$

(iv) $S_n = \dfrac{-3 \cdot (1-(-2)^n)}{1-(-2)} = (-2)^n - 1$，または，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-3) \cdot (-2)^{k-1} = -3 \cdot \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = (-2)^n - 1$

(4) (i) -2 ずつ増えているから，等差数列

(ii) $a_k = a_{k-1} - 2, a_1 = 3$

(iii) $a_k = 3 + (k-1) \times (-2) = -2k + 5$

(iv) $S_n = \dfrac{1}{2}n(2 \times 3 + (n-1) \times (-2)) = -n(n-4)$, または, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2k+5) = -2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 5n = -n(n-4)$

(5) (i) $\dfrac{1}{2}$ 倍ずつ増えているから，等比数列

(ii) $a_k = \dfrac{1}{2}a_{k-1}, a_1 = 8$

(iii) $a_k = 8 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 2^3 \cdot 2^{1-k} = 2^{4-k}$

(iv) $S_n = \dfrac{8 \cdot \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 16(1-2^{-n})$，または，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 8 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 16(1-2^{-n})$

(6) (i) 2 ずつ増えているから，等差数列

(ii) $a_k = a_{k-1} + 2, a_1 = 0$

(iii) $a_k = 0 + (k-1) \times 2 = 2(k-1)$

(iv) $S_n = \dfrac{1}{2}n(2\times 0 + (n-1)\times 2) = n(n-1)$，または，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2(k-1) = 2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1) - 2n = n(n-1)$

解 5.2　(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+1}{3^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}} = 3 > 1$ だから，ダランベールの判定法より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ による級数は発散する．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} < 1$ だから，ダランベールの判定法より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ による級数は収束する．このとき，級数は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{2(n+1)^2}}{\frac{3^n}{2n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 3 > 1$ だから，ダランベールの判定法より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ による級数は発散する．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{-(n+1)}}{(-2)^{-n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(-2)^{-1}\right| = \frac{1}{2} < 1$ だから，ダランベールの判定法より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ による級数は収束する．このとき，級数は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{2} < 1$ だから，ダランベールの判定法より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ による級数は収束する．このとき，級数は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

§6 の問題解答

解 6.1　(1) $(x-2)(x^2+4x+4) = 0$ より，$x = 2$　（$x^2+4x+4 = 0$ は実数解をもたないから）

(2) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ より，$x = 1, 2, 3$

(3) $(x-1)(x+1)(x-2) = 0$ より，$x = \pm 1, 2$

(4) $(x-2)(2x-1)(x+4) = 0$ より，$x = 2, \dfrac{1}{2}, -4$

(5) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0$ より，$x = \pm 1, \pm 2$

(6) $x(x-2)(x+2)(x-3)(x+3) = 0$ より，$x = 0, \pm 2, \pm 3$

(7) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)=0$ より，$x=\pm1,\pm2,\pm3$

解 6.2　$x^2+13x-21=0$ の解を α,β とおくと，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-13$, $\alpha\beta=-21$．(1) $\alpha+\beta=-13$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=13^2-2\times(-21)=211$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=-13\times(211-(-21))=-3016$

解 6.3　(1) $\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3$

(2) $\log_3 9-\log_3 27=\log_3 3^2-\log_3 3^3=2-3=-1$

(3) $\log_3 6\log_6\dfrac{1}{32}+\log_2 32\log_3 2=\log_3 6\log_6 2^{-5}+\log_2 2^5\log_3 2=\log_3 6\cdot(-5)\log_6 2+5\log_3 2=-5\log_3 6\cdot\dfrac{\log_3 2}{\log_3 6}+5\log_3 2=-5\log_3 2+5\log_3 2=0$

(3) の別解 $\log_3 6\log_6\dfrac{1}{32}+\log_2 32\log_3 2=\dfrac{\log_6 6}{\log_6 3}\cdot(-\log_6 32)+\dfrac{\log_6 32}{\log_6 2}\cdot\dfrac{\log_6 2}{\log_6 3}=-\dfrac{\log_6 32}{\log_6 3}+\dfrac{\log_6 32}{\log_6 3}=0$

解 6.4　(1) $\dfrac{(x+3)+2(x-2)}{(x-2)(x+3)}=0$ より，$\dfrac{3x-1}{(x-2)(x+3)}=0$ だから，$x=\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{(2x+1)(x-1)+(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-1)}=0$ より，$\dfrac{(3x+5)(x-2)}{(x-3)(x-1)}=0$ だから，$x=-\dfrac{5}{3},2$

(3) $\dfrac{3x-2}{x-3}-\dfrac{x-3}{x-3}=0$ より，$\dfrac{2x+1}{x-3}=0$ だから，$x=-\dfrac{1}{2}$

(4) $\sqrt{(x-2)(x-3)}=0$ より，$x=2,3$

(5) 根号内は非負だから，$x\geq1$ かつ $x^2\geq3$．与式の両辺を 2 乗すると，$x-1=x^2-3$ だから，整理すれば $(x+1)(x-2)=0$．$x\geq1$ かつ $x^2\geq3$ に注意すれば，$x=-1$ は不適切なので，$x=2$

(6) 根号内は非負だから，$x\geq0$ かつ $\dfrac{2x+1}{x-2}\geq0$．整理すれば，$x>2$．与式の両辺を 2 乗すると，$x=\dfrac{2x+1}{x-2}$ だから，整理すれば $x^2-4x-1=0$．これを解くと，$x=2\pm\sqrt{5}$ であるが，$x>2$ より，$x=2-\sqrt{5}$ は不適切．よって，$x=2+\sqrt{5}$

(7) $3^x=3^4$ より，両辺で底 3 の対数をとれば，$x=4$

(8) $(2^x)^2-3\cdot2^x=0$ より，$2^x(2^x-3)=0$．$2^x>0$ に注意すれば，$2^x=3$．両辺で底 2 の対数をとれば，$x=\log_2 3$

(9) $(4^x)^2-6\cdot4^x-16=0$ より，$(4^x+2)(4^x-8)=0$．$4^x>0$ に注意すれば，$4^x=8$．よって，$2^{2x}=2^3$ より，両辺で底 2 の対数をとれば，$2x=3$ だから，$x=\dfrac{3}{2}$

(10) 定義域は $x^2+1>0$ かつ $x+1>0$ より，$x>-1$．$\log_4 \dfrac{x^2+1}{x+1}=0$ だから，両辺で底 4 の指数をとれば，$\dfrac{x^2+1}{x+1}=1$．よって，$\dfrac{x^2-x}{x+1}=0$ より，$\dfrac{x(x-1)}{x+1}=0$ だから，$x=0,1$．これは共に $x>-1$ をみたす．

(11) 定義域は $x>0$ かつ $x-2>0$ より，$x>2$．$\log_9 x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 3^2}=\dfrac{1}{2}\log_3 x$ より，与式は，$\dfrac{1}{2}\log_3 x=\log_3(x-2)$ とできるから，$\log_3 x=\log_3(x-2)^2$．両辺で底 3 の指数をとれば，$x=(x-2)^2$．これを整理して，$(x-1)(x-4)=0$．$x>2$ に注意すれば，$x=4$

(12) 定義域は $x>-1$．$2\log_2(x+1)-(\log_2(x+1))^2+3=0$ より，$(\log_2(x+1)+1)(\log_2(x+1)-3)=0$．よって，$\log_2(x+1)=-1,3$．両辺で底 2 の指数をとれば，$x+1=2^{-1},2^3$．したがって，$x=-\dfrac{1}{2},7$．これは共に $x>-1$ をみたす．

§7 の問題解答

解 7.1　(1) $120^\circ=\dfrac{2}{3}\pi$ rad

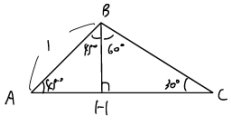
(2) π rad $=180^\circ$

(3) $135^\circ=\dfrac{3}{4}\pi$ rad

(4) $\dfrac{2}{5}\pi$ rad $=72^\circ$

(5) $110^\circ=\dfrac{11}{18}\pi$ rad

解 7.2



角 B から辺 AC に垂線を降ろし，その足を H とすると，三角形 ABH は AH = BH の二等辺三角形だから，$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=1\times\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$．よって，$\mathrm{BC}\times\cos 60^\circ=\mathrm{BH}$ より，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$．また，$\mathrm{BC}\times\sin 60^\circ=\mathrm{CH}$ だから，$\mathrm{CH}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$．したがって，$\mathrm{AC}=\mathrm{AH}+\mathrm{CH}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$．

解 7.3　(1) $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

(2) $\tan 22.5^\circ = \tan \dfrac{45^\circ}{2}$．ここで, $\tan^2 \dfrac{45^\circ}{2} = \dfrac{1-\sin 45^\circ}{1+\cos 45^\circ} = \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}-1)^2$.

よって，$\tan 22.5^\circ > 0$ より，$\tan 22.5^\circ = \sqrt{2}-1$

(3) $\cos 195^\circ = \cos(180^\circ + 15^\circ) = -\cos 15^\circ = -\cos(45^\circ - 30^\circ) = -(\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(4) $\sin(-135^\circ) = -\sin 135^\circ = -\sin(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解 7.4　(1) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $-2\sin\theta + 2\cos\theta = -2(\sin\theta - \cos\theta) = -2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $2\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$．ただし，$\alpha$ は $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ をみたす実数.

解 7.5　(1) $\sin(3\theta) = \sin(\theta + 2\theta) = \sin\theta\cos(2\theta) + \cos\theta\sin(2\theta) = \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta) + \cos\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(2) $\cos(3\theta) = \cos(\theta + 2\theta) = \cos\theta\cos(2\theta) - \sin\theta\sin(2\theta) = \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

解 7.6　(1) n を整数とすると, $3x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi, \dfrac{5}{6}\pi + 2n\pi$ より, $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2}{3}n\pi, \dfrac{5}{18}\pi + \dfrac{2}{3}n\pi$

(2) n を整数とすると，$x + \dfrac{\pi}{5} = 0 + 2n\pi$ より，$x = -\dfrac{\pi}{5} + 2n\pi$

(3) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ だから，与式は $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ とできる．よって, n を整数とすると, $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi, \dfrac{5}{6}\pi + 2n\pi$ より, $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$

(4) $\sin^2 x + 2\cos x - 1 = (1 - \cos^2 x) + 2\cos x - 1 = -\cos x(\cos x - 2)$ だから，与式は $-\cos x(\cos x - 2) = 0$ とできる．$-1 \leq \cos x \leq 1$ に注意すれば，$\cos x = 0$．よって，n を整数とすると，$x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$

(5) $\sin^3 x - \dfrac{1}{2}\sin x = \sin x\left(\sin x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ だから，与式は $\sin x\left(\sin x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ とできる．よって，$\sin x = 0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だか

ら，n を整数とすると，$x = 0 + 2n\pi, \pi + 2n\pi, \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi, \dfrac{3}{4}\pi + 2n\pi, \dfrac{5}{4}\pi + 2n\pi, \dfrac{7}{4}\pi + 2n\pi = n\pi, n\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$

(6) $\sin^3 x - \sin x + \cos^2 x = \sin^3 x - \sin x + (1 - \sin^2 x) = (\sin x - 1)^2(\sin x + 1)$ だから，与式は $(\sin x - 1)^2(\sin x + 1) = 0$ とできる．よって，n を整数とすると，$x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, \dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$

(7) $\tan x + \tan(2x) = \tan x + \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{\tan x(1 - \tan^2 x) + 2\tan x}{1 - \tan^2 x} = -\dfrac{\tan^3 x - 3\tan x}{1 - \tan^2 x} = -\dfrac{\tan x(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3})}{1 - \tan^2 x}$ だから，与式は $-\dfrac{\tan x(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3})}{1 - \tan^2 x} = 0$ とできる．よって，$\tan x = 0, \pm\sqrt{3}$ だから，n を整数とすると，$x = 0 + n\pi, \dfrac{\pi}{3} + n\pi, \dfrac{2}{3}\pi + n\pi = n\pi, n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

解 7.7　① $\mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 - 2 \cdot \mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} \cdot \cos(\alpha - \beta)$，② OR，③ PR，④ OS，⑤ QS，⑥ ピタゴラス

解 7.8　(1) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ より，$\cos x = \dfrac{\sin(2x)}{2\sin x}$ だから，

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x) &= \cos x \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot \cdots \cdot \cos(2^{n-1}x) \\ &= \frac{\sin(2x)}{2\sin x} \cdot \frac{\sin(4x)}{2\sin(2x)} \cdot \frac{\sin(8x)}{2\sin(4x)} \cdot \cdots \cdot \frac{\sin(2^n x)}{2\sin(2^{n-1}x)} \\ &= \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}\end{aligned}$$

(2) (1) の等式で，$x = 20^\circ, n = 3$ のときを考えると，$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \dfrac{\sin 160^\circ}{2^3 \sin 20^\circ} = \dfrac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{8\sin 20^\circ} = \dfrac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \dfrac{1}{8}$

§8 の問題解答

解 8.1　(1) $\lim_{x \to -2}(5x^2 + 2x + 4) = 20$

(2) $\lim_{x \to 0}(-x^3 + x^2 + 2x - 3) = -3$

(3) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 - 7x + 12)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 12} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

(4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \to 0} x = 0$

解 8.2　(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

(2) $t=x-1$ とおくと，$\lim_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

(3) $\lim_{x\to-\infty}(2x^3-x^2-x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=-\infty$

(4) $\lim_{x\to 1+0}\dfrac{x^3-x^2}{x^4-2x^2+1}=\lim_{x\to 1+0}\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)^2}=\lim_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{(x+1)^2(x-1)}=$
$\lim_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{(x+1)^2}\cdot\lim_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{4}\lim_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}$．$t=x-1$ とおくと，$\lim_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=$
$\lim_{t\to+0}\dfrac{1}{t}=\infty$ だから，$\lim_{x\to 1+0}\dfrac{x^3-x^2}{x^4-2x^2+1}=\infty$

(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=1$

(6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x}=2\lim_{x\to 0}\cos x=2$

§9 の問題解答

解 9.1　(1) $f'(x)=2, f''(x)=0$

(2) $f'(x)=\sqrt{3}, f''(x)=0$

(3) $f'(x)=-2x+3, f''(x)=-2$

(4) $f'(x)=4x-1, f''(x)=4$

(5) $f'(x)=3x^2+2x+1, f''(x)=6x+2$

(6) $f'(x)=-9x^2+2x+2, f''(x)=-18x+2$

(7) $f'(x)=-x^2-6x, f''(x)=-2x-6$

(8) $f'(x)=4x^3, f''(x)=12x^2$

(9) $f'(x)=4x^3+6x^2-1, f''(x)=12x^2+12x$

解 9.2　(1) $f(x)=x^2-1$ より，$f'(x)=2x, f''(x)=2$

(2) $f'(x)=2(2x+1)\cdot 2=4(2x+1), f''(x)=4\cdot 2=8$

(3) $f'(x)=-(3x-1)+(-x+1)\cdot 3=-6x+4, f''(x)=-6$

(4) $f(x)=2x^3+2x$ より，$f'(x)=6x^2+2, f''(x)=12x$

(5) $f'(x)=3(x^2+2x+2)+(3x+1)(2x+2)=9x^2+14x+8, f''(x)=18x+14$

(6) $f'(x)=(2x-1)(x^2+2x-1)+(x^2-x-1)(2x+2)=4x^3+3x^2-8x-1, f''(x)=12x^2+6x-8$

(7) $f'(x)=3(x^2+1)^2\cdot 2x=6x(x^2+1)^2, f''(x)=6(x^2+1)^2+6x\cdot 2(x^2+1)\cdot$

$2x = 6(x^2+1)(5x^2+1)$

(8) $f'(x) = 2(x^2-2) + (2x+1)\cdot 2x = 2(3x^2+x-2)$, $f''(x) = 2(3\cdot 2x+1) = 2(6x+1)$

(9) $f(x) = (x^2-1)(x^2-4)$ より, $f'(x) = 2x(x^2-4) + (x^2-1)\cdot 2x = 2x(2x^2-5)$, $f''(x) = 2(2x^2-5) + 2x\cdot 4x = 2(6x^2-5)$

(10) $f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = 3(x-1)(x+1)$. $f'(x) = 3(x^2-1)$ より, $f''(x) = 6x$

(11) $f'(x) = (x^2-4) + (x+5)\cdot 2x = 3x^2+10x-4$, $f''(x) = 6x+10$

(12) $f(x) = (x^2-1)^4(x^2+1)^4 = (x^4-1)^4$ より, $f'(x) = 4(x^4-1)^3\cdot 4x^3 = 16x^3(x^4-1)^3$, $f''(x) = 16(3x^2(x^4-1)^3 + x^3\cdot 3(x^4-1)^2\cdot 4x^3) = 48x^2(x^4-1)^2(5x^4-1)$

解 9.3 (1) $f(x) = (x-1)^{-1}$ より, $f'(x) = -(x-1)^{-2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

(2) $f(x) = \dfrac{-(x+2)}{x+2} = -1$ より, $f'(x) = 0$

(3) $f(x) = (3x-1)(2x+1)^{-1}$ より, $f'(x) = 3(2x+1)^{-1} + (3x-1)\cdot(-1)(2x+1)^{-2}\cdot 2 = \dfrac{3}{2x+1} - \dfrac{2(3x-1)}{(2x+1)^2} = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$

(4) $f(x) = (3x+1)(2x^2+x-2)^{-1}$ より, $f'(x) = 3(2x^2+x-2)^{-1} + (3x+1)\cdot(-1)(2x^2+x-2)^{-2}\cdot 4x = \dfrac{3}{2x^2+x-2} - \dfrac{4x(3x+1)}{(2x^2+x-2)^2} = -\dfrac{6x^2+x+6}{(2x^2+x-2)^2}$

(5) $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{x+2} = x+1$ より, $f'(x) = 1$

(6) $f(x) = -\dfrac{(x^2+x+1)-2(x+1)}{x^2+x+1} = -1 + \dfrac{2(x+1)}{x^2+x+1} = -1 + 2(x+1)(x^2+x+1)^{-1}$ より, $f'(x) = 2(x^2+x+1)^{-1} + 2(x+1)\cdot(-1)(x^2+x+1)^{-2}\cdot(2x+1) = \dfrac{2}{x^2+x+1} - \dfrac{2(x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = -\dfrac{2(x^2+2x)}{(x^2+x+1)^2}$

(7) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ より, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

(8) $f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{2}}$ より, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

(9) $f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ より, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(10) $f(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}}$ より, $f'(x) = \dfrac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x-1}$

(11) $f(x) = (x+2)^{-\frac{1}{2}}$ より, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{(x+2)^3}}$

(12) $f(x)=2(x-3)^{-\frac{1}{2}}$ より，$f'(x)=2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)(x-3)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}$

(13) $f(x)=x(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ より，$f'(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}+x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)(2x+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{(2x+1)^3}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

(14) $f(x)=\sqrt{x-1}=(x-1)^{\frac{1}{2}}$ より，$f'(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

(15) $f(x)=(x+2)(2x-1)^{-\frac{1}{2}}$ より，$f'(x)=(2x-1)^{-\frac{1}{2}}+(x+2)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)(2x-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}-\dfrac{x+2}{\sqrt{(2x-1)^3}}=\dfrac{x-3}{\sqrt{(2x-1)^3}}$

解 9.4　まず，微分可能性を示す．和積の公式（定理**??**）より，任意の実数 c に対し，

$$\lim_{x\to c}\frac{\cos x-\cos c}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{1}{x-c}\cdot(-2)\sin\frac{x-c}{2}\sin\frac{x+c}{2}$$
$$=-\lim_{x\to c}\frac{\sin\frac{x-c}{2}}{\frac{x-c}{2}}\sin\frac{x+c}{2}$$

とできる．$y=\dfrac{x-c}{2}$ とおくと，$x\to c$ のとき，$y\to 0$ だから，

$$-\lim_{x\to c}\frac{\sin\frac{x-c}{2}}{\frac{x-c}{2}}\sin\frac{x+c}{2}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\sin(y+c).$$

定理**??**より，$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$ だから，

$$-\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\sin(y+c)=-\sin c.$$

よって，$\cos x$ は微分可能である．

次に，導関数を計算する．加法定理（定理**??**）より，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{(x+h)-x}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\frac{\sin x\sin h}{h}\right)$$
$$=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$
$$=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}-\sin x$$
$$=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}-\sin x$$
$$=-\cos x\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\cdot\frac{h}{\cos h+1}-\sin x$$

$$= -\sin x.$$

解 9.5　(1) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(2) $f'(x) = 2\cos(2x)$

(3) $f'(x) = 2e^{2x+1}$

(4) $f'(x) = 2x\cos(x^2+1)$

(5) $f'(x) = -2\sin(2x-1)$

(6) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$

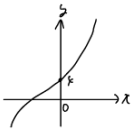
(7) $f'(x) = 2xe^{x^2}$

(8) $f'(x) = (6x-1)\cos(3x^2-x-1)$

(9) $f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2(2x)}$

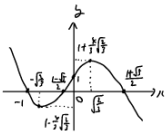
解 9.6　(1) $f'(x) = 3x^2+2 > 0$, $f''(x) = 6x$. $f''(x) = 0$ のとき, $x = 0$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
f'	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	0	$+$
f	↗	k	↗



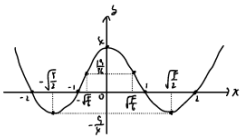
(2) $f'(x) = -3x^2+2$, $f''(x) = -6x$. $f'(x) = 0$ のとき, $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. $f''(x) = 0$ のとき, $x = 0$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f	↘	極小	↗	1	↗	極大	↘



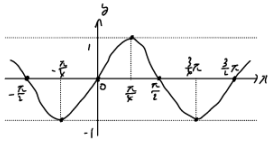
(3) $f'(x)=4x^3-10x$, $f''(x)=12x^2-10$. $f'(x)=0$ のとき, $x=0,\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$. $f''(x)=0$ のとき, $x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}$. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$\frac{19}{36}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{19}{36}$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$



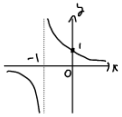
(4) $f'(x)=2\cos(2x)$, $f''(x)=-4\sin(2x)$. $f'(x)=0$ のとき, $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n}{2}\pi$（ただし, $n\in\mathbf{Z}$）. $f''(x)=0$ のとき, $x=\dfrac{n}{2}\pi$（ただし, $n\in\mathbf{Z}$）. $\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ は振動する.

x	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$



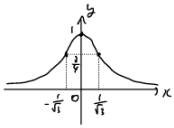
(5) $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}<0$, $f''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$. 定義域は $x\neq-1$. $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-1+0}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-1-0}f(x)=-\infty$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
f'	$-$		$-$
f''	$-$		$+$
f	↘		↳



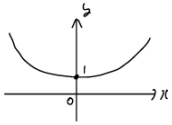
(6) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$. $f'(x) = 0$ のとき, $x = 0$. $f''(x) = 0$ のとき, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↳



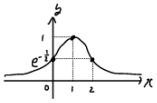
(7) $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = 2(2x^2+1)e^{x^2} > 0$. $f'(x) = 0$ のとき, $x = 0$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$
f''	$+$	$+$	$+$
f	↘	1	↗



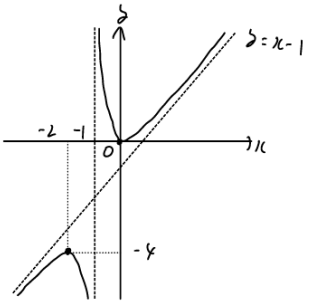
(8) $f'(x) = -(x-1)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$, $f''(x) = x(x-2)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$. $f'(x) = 0$ のとき, $x = 1$. $f''(x) = 0$ のとき, $x = 0, 2$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	↗	$e^{-\frac{1}{2}}$	↗	1	↘	$e^{-\frac{1}{2}}$	↳



(9) $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$. $f'(x)=0$ のとき, $x=0,2$. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-1+0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-1-0} f(x)=-\infty$. また, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$, $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-x}{x+1}=-1$, $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x+1}=-1$ より, (タイプ I の) 漸近線として $y=x-1$ があることに注意する.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
f	↗	-4	↘		↘	0	↗



解 9.7 (1) $f'(x)=\dfrac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}\cdot\left(-\sin\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)\right)=-\dfrac{5}{(x+2)^2}\sin\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)$

(2) $f(x)=\log(\cos(2x))-3x$ より, $f'(x)=\dfrac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}-3=-2\tan(2x)-3$

(3) $f'(x)=\dfrac{\cos x}{e^x}-\dfrac{\sin x}{e^x}=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$

(4) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\log x}=\dfrac{1}{x\log x}$

(5) $f(x)=\dfrac{1-2\sin^2 x}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin x}-2\sin x$ より, $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}(1+2\sin^2 x)$

(6) $f(x)=(\cos(\sqrt{2}x))^{\frac{3}{2}}$ より,

$f'(x)=\dfrac{3}{2}(\cos(\sqrt{2}x))^{\frac{1}{2}}\cdot(-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x))=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}x)\sqrt{\cos(\sqrt{2}x)}$

解 9.8　(1) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{e^t}-1$ より, $f'(x)=0$ のとき, $x=\log 4=2\log 2$. よって,

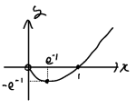
x	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$2(1-\log 2)$	$\nearrow$

増減表より, $f(x)$ の最小値は $2(1-\log 2)$.

(2) $t=-\log x$ とおくと, $x=e^{-t}$ で, $x\to+0$ のとき $t\to\infty$ だから, $\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{t\to\infty}e^{-t}\cdot(-t)=-\lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^t}$. ここで, (1) より, $\sqrt{e^x}-x$ の最小値は $2(1-\log 2)>0$ だから, $\sqrt{e^x}-x>0$ が成り立つ. よって, $x>0$ のとき, $e^x>x^2$ がいえる. このとき, $0<\dfrac{1}{e^x}<\dfrac{1}{x^2}$ より, $0<\dfrac{x}{e^x}<\dfrac{1}{x}$. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ だから, はさみうちの原理より, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$. したがって, $\lim_{x\to+0}x\log x=-\lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$.

(3) 定義域は $x>0$. $f'(x)=\log x+1$, $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$. $f'(x)=0$ のとき, $x=e^{-1}$. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$. (2) より, $\lim_{x\to+0}f(x)=0$

x	0	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
f'		$-$	0	$+$
f''		$+$	$+$	$+$
f	$\searrow$		$-e^{-1}$	$\nearrow$



§10 の問題解答

解 10.1　① 原始，② 被積分

解 10.2　右端の点を選んだときの面積　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\times\frac{k^2}{n^2}\right)=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1).$

左端の点を選んだときの面積　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\times\frac{k^2}{n^2}\right)=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)=\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1).$

よって, 求める面積Sは, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1)\le S\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1)$ をみたす. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1)=\frac{1}{3}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1)=\frac{1}{3}$ だから，はさみうちの原理より，$S=\dfrac{1}{3}$.

解 10.3　$S=\dfrac{1}{3}=0.333\cdots$ だから，$\dfrac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1)$ と $\dfrac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1)$ の値が小数第 4 位の切り捨てではじめて 0.333 になる n を探せばよい. $\dfrac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1)$ は $n=1500$ で，$\dfrac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1)$ は $n=751$ でこの n になるから，S の値と小数第 3 位まで一致する近似値を得るには，最低で 1500 等分必要である.

§11 の問題解答

解 11.1　C を積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int(x^2+2x+1)\,dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

(2) $\displaystyle\int 2x(2x^2+1)\,dx=\int(4x^3+2x)\,dx=x^4+x^2+C$

(3) $\displaystyle\int(2x+1)(2x-1)\,dx=\int(4x^2-1)\,dx=\frac{4}{3}x^3-x+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\log(2x+1)+C$

(5) $\displaystyle\int\sqrt{2x+1}\,dx=\int(2x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+C$

(6) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx=\int(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx=2\cdot\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{2x+1}+C$

(7) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x}\,dx=\int\left(2+\frac{1}{x}\right)\,dx=2x+\log x+C$

(8) $\displaystyle\int(\sqrt{2x}+1)\,dx=\int((2x)^{\frac{1}{2}}+1)\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(2x)^{\frac{3}{2}}+x+C=\frac{1}{3}\sqrt{(2x)^3}+x+$

C

(9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x}+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int (\sqrt{2}+x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \sqrt{2}x + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2}x + 2\sqrt{x} + C$

解 11.2　(1) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 2x(2x^2+1)\,dx = \int_{-1}^1 (4x^3+2x)\,dx = [x^4+x^2]_{-1}^1 = (1+1)-(1+1) = 0$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)(x-1)\,dx = \int_{-1}^1 (x^2-1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3}-1\right) - \left(-\frac{1}{3}+1\right) = -\frac{4}{3}$

(4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = [\log(x+1)]_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2$

(6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x}\,dx = \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx = [x+\log x]_1^2 = (2+\log 2) - (1+\log 1) = 1+\log 2$

(7) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx = e - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$

解 11.3　C を積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) + C = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{5x-1}{(2x-1)(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{2}{x+1}\right)\,dx = \frac{1}{2}\log(2x-1) + 2\log(x+1) + C$　($\log((x+1)^2\sqrt{2x-1}) + C$ と答えてもよい)

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{x^3+2x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{x^2+2x}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)\,dx = -\log(x+1) + \log(x^2+x+1) + C$　($\log\dfrac{x^2+x+1}{x+1} + C$ と答えてもよい)

(4) $\displaystyle\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$

(5) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

(6) $\displaystyle\int x\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

(7) $\displaystyle\int x^3\sqrt{2x^2+3}\,dx = \int x^2\cdot x(2x^2+3)^{\frac{1}{2}}\,dx = x^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(2x^2+3)^{\frac{3}{2}} - \int 2x\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{6}x^2(2x^2+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int x(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{6}x^2(2x^2+3)^{\frac{3}{2}} -$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(2x^2+3)^{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{6}x^2(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{30}(2x^2+3)^{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{30}(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}(5x^2-(2x^2+3))+C=\frac{1}{10}(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}(x^2-1)+C=\frac{1}{10}(x^2-1)\sqrt{(2x^2+3)^3}+C$

解 11.4　(1) $\displaystyle\int_3^4 \log(x-2)\,dx=[x\log(x-2)]_3^4-\int_3^4 x\cdot\frac{1}{x-2}\,dx=(4\log 2-3\log 1)-\int_3^4\left(1+\frac{2}{x-2}\right)dx=4\log 2-[x+2\log(x-2)]_3^4=4\log 2-(4+2\log 2)+(3+2\log 1)=2\log 2-1$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx=\int_0^\pi\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi=\frac{1}{2}\left(\left(\pi+\frac{1}{2}\sin(2\pi)\right)-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\int_0^\pi\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$

(4) $\displaystyle\int_1^2\frac{4x^2+3x+2}{x^3+x^2}\,dx=\int_1^2\frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+1)}\,dx=\int_1^2\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x+1}\right)dx$

$=\left[\log x-\frac{2}{x}+3\log(x+1)\right]_1^2=(\log 2-1+3\log 3)-(\log 1-2+3\log 2)=1-2\log 2+3\log 3$

(5) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x\,dx=[x^2e^x]_0^1-\int_0^1 2xe^x\,dx=e-2\left([xe^x]_0^1-\int_0^1 1\cdot e^x\,dx\right)=e-2e+2\int_0^1 e^x\,dx=-e+2[e^x]_0^1=-e+2(e-1)=e-2$

(6) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと, $\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$ より, $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2-2\sin^2\theta}}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

解 11.5　C を積分定数とする．$t=\sqrt{x^2+2x+2}+x+1$ とおくと，$x=\frac{1}{2}t-1-\frac{1}{2t}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{t^2+1}{2t^2}$.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=\int\frac{1}{\frac{t^2+1}{2t}}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt=\int\frac{1}{t}\,dt=\log t+C=\log(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1)+C$

(2) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+2x+2}\,dx=\int\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt=\int\frac{t^4+2t^2+1}{4t^3}\,dt=\int\left(\frac{1}{4}t+\frac{1}{2t}+\frac{1}{4t^3}\right)dt$

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\log t-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}t^{-2}+C=\frac{1}{8}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+\frac{1}{2}\log t+C$．ここで, $\frac{1}{t}=\sqrt{x^2+2x+2}-$

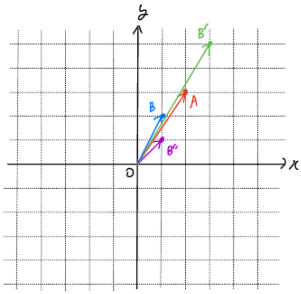
$(x+1)$ だから, $t^2-\dfrac{1}{t^2}=4(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}$. したがって, $\displaystyle\int\sqrt{x^2+2x+2}\,dx=\frac{1}{8}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+\frac{1}{2}\log t+C=\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\log(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1)+C$

解 11.6　$\sin x\tan x=\sin x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\cos x=\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cdot\cos x$ である. $t=\sin x$ とおくと, $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$. よって, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cdot\cos x\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^2}{1-t^2}\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-t^2}\right)dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\right)dt=\Big[-t-\frac{1}{2}\log(1$
$\displaystyle-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}(\log 3-\log 2)=-\frac{1}{2}(1-\log 3)$

別解　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\tan x\,dx=[-\cos x\tan x]_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-\cos x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=[-\sin x]_0^{\frac{\pi}{6}}+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,dx=-\sin\frac{\pi}{6}+\sin 0+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,dx=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,dx$. ここで, $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2}(1+t^2)$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. また, $\left(\tan\dfrac{\pi}{12}\right)^2=\tan^2\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=(2-\sqrt{3})^2$ で, $\tan\dfrac{\pi}{12}>0$ だから, $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}<1$. よって, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,dx=\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{2}{1-t^2}\,dt=\int_0^{2-\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$
$[-\log(1-t)+\log(1+t)]_0^{2-\sqrt{3}}=\left[\log\dfrac{1+t}{1-t}\right]_0^{2-\sqrt{3}}=\log\dfrac{1+(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})}-\log 1=\log\sqrt{3}$. したがって, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\tan x\,dx=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,dx=-\frac{1}{2}+\log\sqrt{3}=-\frac{1}{2}(1-\log 3)$

§ 12 の問題解答

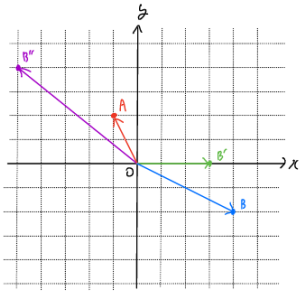
解 12.1　(1) (i) $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,3)+(1,2)=(3,5)$
(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OB}''}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,3)-(1,2)=(1,1)$
(iii)



(2) (i) $\overrightarrow{\mathrm{OB}'} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (-1, 2) + (4, -2) = (3, 0)$

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OB}''} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (-1, 2) - (4, -2) = (-5, 4)$

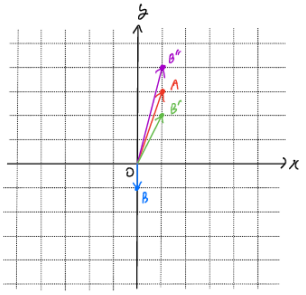
(iii)



(3) (i) $\overrightarrow{\mathrm{OB}'} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1, 3) + (0, -1) = (1, 2)$

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OB}''} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1, 3) - (0, -1) = (1, 4)$

(iii)



解 12.2　(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

解 12.3　(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 8 \times (-1) + (-1) \times 1 = -9$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 4 \times (-2) = 2$

解 12.4　(1) $\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(2) $\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

(3) $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 0^2} = \sqrt{58}$

(4) $\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{36} = 6$

解 12.5　(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{5}, |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{13}, \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -4$ だから, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}| \cos\theta$ より, $-4 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cos\theta$. よって, $\cos\theta = -\dfrac{4}{\sqrt{65}}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{13}, |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{17}, \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -11$ だから, $-11 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} \cos\theta$. よって, $\cos\theta = -\dfrac{11}{\sqrt{221}}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{14}, |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{14}, \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 10$ だから, $10 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \cos\theta$. よって, $\cos\theta = \dfrac{10}{14} = \dfrac{5}{7}$

§ 13 の問題解答

解 13.1　(1) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $C+3B=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-4&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12&0\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-1\\2&-1\end{pmatrix}$

(4) $AB=\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-14&0\end{pmatrix}$

(5) $BA=\begin{pmatrix}-4&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-16\\1&4\end{pmatrix}$

(6) $AC=\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-5\\8&-1\end{pmatrix}$

(7) $CA=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&10\\-4&-2\end{pmatrix}$

(8) $CB=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&0\\3&0\end{pmatrix}$

(9) $BC=\begin{pmatrix}-4&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&4\\2&-1\end{pmatrix}$

(10) $BCA=B(CA)=\begin{pmatrix}-4&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&10\\-4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-40\\-1&10\end{pmatrix}$

(11) $ACB=(AC)B=\begin{pmatrix}-2&-5\\8&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-33&0\end{pmatrix}$

(12) $CBA=(CB)A=\begin{pmatrix}-9&0\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-36\\3&12\end{pmatrix}$

(13) $A^2B^2=AABB=A(AB)B=\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\-14&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\56&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}224&0\\-112&0\end{pmatrix}$

(14) $BA^2C=BAAC=(BA)(AC)=\begin{pmatrix}-4&-16\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-5\\8&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-120&36\\30&-9\end{pmatrix}$

(15) $BA+2A-C^2=\begin{pmatrix}-4&-16\\1&4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} -4 & -16 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

解 13.2　(1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14$

(2) $|B| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

(3) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$

(4) $|AB| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -14 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

(5) $|BA| = \begin{vmatrix} -4 & -16 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 - (-16) = 0$

(6) $|AC| = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 2 - (-40) = 42$

(7) $|CA| = \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 - (-40) = 42$

(8) $|CB| = \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

(9) $|BC| = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$

(10) $|BCA| = \begin{vmatrix} 4 & -40 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0$

(11) $|ACB| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -33 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

(12) $|CBA| = \begin{vmatrix} -9 & -36 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = -108 - (-108) = 0$

(13) $|A^2B^2| = \begin{vmatrix} 224 & 0 \\ -112 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

(14) $|BA^2C| = \begin{vmatrix} -120 & 36 \\ 30 & -9 \end{vmatrix} = 1080 - 1080 = 0$

(15) $|BA + 2A - C^2| = \begin{vmatrix} -7 & -7 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 14 - (-56) = 70$

解 13.3 (1) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -9 \\ 17 & -2 & 32 \\ -11 & 5 & -24 \end{pmatrix}$

(2) $BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 15 & 10 \\ 21 & -28 & -5 \\ -8 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $BC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -11 & 10 \\ -12 & 18 & -12 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $CB = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 23 \\ 4 & 5 & -6 \\ 8 & -5 & 23 \end{pmatrix}$

(5) $AC = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 19 & -11 & 22 \\ -2 & 3 & -13 \end{pmatrix}$

(6) $CA = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 23 & 10 \\ 8 & -9 & 1 \\ -19 & 17 & 2 \end{pmatrix}$

(7) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ -22 & 23 & 8 \\ 20 & -12 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 0 & 8 & -23 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

(9) $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -14 & 17 \\ 1 & 6 & -1 \\ 7 & -8 & 13 \end{pmatrix}$

(10) $ABC=(AB)C=\begin{pmatrix}-7&1&-9\\17&-2&32\\-11&5&-24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1&3\\1&1&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-45&35&-32\\130&-115&87\\-87&88&-67\end{pmatrix}$

(11) $BAC=(BA)C=\begin{pmatrix}-4&15&10\\21&-28&-5\\-8&9&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1&3\\1&1&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&-11&-32\\46&-34&114\\-25&20&-43\end{pmatrix}$

(12) $CBA=C(BA)=\begin{pmatrix}4&-1&3\\1&1&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&15&10\\21&-28&-5\\-8&9&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-61&115&42\\33&-31&7\\-79&123&34\end{pmatrix}$

解 13.4　(1) $\begin{vmatrix}2&5&4\\1&4&3\\1&3&2\end{vmatrix}=16+15+12-16-18-10=-1$

(2) $\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&2&2\\2&1&2\end{vmatrix}=4+(-4)+1-(-4)-2-2=1$

(3) $\begin{vmatrix}2&-1&0\\-1&1&4\\3&1&-2\end{vmatrix}=-4+(-12)+0-0-8-(-2)=-22$

(4) $\begin{vmatrix}1&2&3\\-3&-2&-1\\2&1&-2\end{vmatrix}=4+(-4)+(-9)-(-12)-(-1)-12=-8$

解 13.5　(1) $\begin{vmatrix}1&3\\a&-2\end{vmatrix}=-3a-2$ だから，$\begin{vmatrix}1&3\\a&-2\end{vmatrix}=0$ のとき，$-3a-2=0$．よって，

$a=-\dfrac{2}{3}$

(2) $\begin{vmatrix}2&1&-1\\-1&a&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=3a+6$ だから，$\begin{vmatrix}2&1&-1\\-1&a&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=0$ のとき，$3a+6=0$．よって，

$a=2$

(3) $\begin{vmatrix}1&2&a\\-1&-2&-3\\a&0&3\end{vmatrix}=2a^2-6a$ だから，$\begin{vmatrix}1&2&a\\-1&-2&-3\\a&0&3\end{vmatrix}=0$ のとき，$2a^2-6a=0$．

よって，$a=0,3$

§14 の問題解答

解 14.1　(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，階数は 2

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，

階数は 2

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，階数は 2

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ より，階数は

3

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，階数は 2

(6) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，階数は 3

解 14.2　(1) 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ を簡約化すると，$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$ より，$x = -\frac{1}{5}, y = \frac{2}{5}$

(2) 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$ を簡約化すると，$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ より，$x = 1, y = \frac{1}{2}$

(3) 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$ を簡約化すると，$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -4 & 12 \\ 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$ より，$x = -1, y = -3$

(4) 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right)$ を簡約化すると，$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ より，$x = 2, y = 0, z = 1$

(5) 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ を簡約化すると，$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ より，$x = 1, y = -1, z = 1$

(6) 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ を簡約化すると，$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$ より，$x = 0, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

§15 の問題解答

解 15.1　(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{12-10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2-12}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

解 15.2　(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ とおく．$\det A = 0$ だから，逆行列を持たない．

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．行列 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ を簡約化すると，$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

だから，A は逆行列を持ち，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．行列 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ を簡約化すると，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right)$$ だから，A は逆行列を持ち，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とおく．行列 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ を簡約化すると，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & -4 & -5 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{5}{22} & -\frac{1}{22} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{5}{22} & -\frac{1}{22} \end{array}\right)$$ だから，A は逆行列を持ち，$A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -10 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-2&-3&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ とおく．$\det A=0$ だから，逆行列を持たない．

(6) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-2&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}$ とおく．行列 $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\-3&-2&-1&0&1&0\\2&1&-2&0&0&1\end{array}\right)$ を簡約化すると，

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\-3&-2&-1&0&1&0\\2&1&-2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\-1&-1&-3&0&1&1\\2&1&-2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&1&1&1\\2&1&-2&0&0&1\end{array}\right)\to$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&-1&-2&-2\\0&1&0&1&1&1\\2&0&-2&-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&-1&-2&-2\\0&1&0&1&1&1\\0&0&-8&1&3&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&-1&-2&-2\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{5}{8}&-\frac{7}{8}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$ だから，A は逆行列を持ち，$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-5&-7&-4\\8&8&8\\-1&-3&-4\end{pmatrix}$

解 15.3　(1) 連立 1 次方程式 $\begin{cases}2x+y=0\\-x+2y=1\end{cases}$ を行列で表すと，$\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$．

逆行列　係数行列の逆行列は，$\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$ だから，これを連立 1 次方程式の両辺に左からかけると，$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$．よって，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$．

クラメルの公式　$\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}=5,\ \begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}=-1,\ \begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}=2$ だから，クラメルの公式より，$x=\frac{-1}{5}=-\frac{1}{5}, y=\frac{2}{5}$．

(2) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x-2y=1 \end{cases}$ を行列で表すと，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

逆行列　係数行列の逆行列は，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ だから，これを連立 1 次方程式の両辺に左からかけると，$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. よって，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

クラメルの公式　$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-6, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-6, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3$ だから，クラメルの公式より，$x=-\frac{-6}{-6}=1, y=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$.

(3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 3x-y=0 \\ x+y=-4 \end{cases}$ を行列で表すと，$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

逆行列　係数行列の逆行列は，$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ だから，これを連立 1 次方程式の両辺に左からかけると，$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. よって，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

クラメルの公式　$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=-4, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-12$ だから，クラメルの公式より，$x=\frac{-4}{4}=-1, y=\frac{-12}{4}=-3$.

(4) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+3z=7 \\ 2x+y+5z=9 \end{cases}$ を行列で表すと，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

逆行列　係数行列の逆行列は，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ だから，これを連立 1 次

方程式の両辺に左からかけると, $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

クラメルの公式　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 1$ だから, クラメルの公式より, $x = \dfrac{2}{1} = 2, y = \dfrac{0}{1} = 0, z = \dfrac{1}{1} = 1$.

(5) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 1 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ を行列で表すと, $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

逆行列　係数行列の逆行列は, $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ だから, これを連立 1 次方程式の両辺に左からかけると, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

クラメルの公式　$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1$ だから, クラメルの公式より, $x = \dfrac{-1}{-1} = 1, y = \dfrac{1}{-1} = -1, z = \dfrac{-1}{-1} = 1$.

(6) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} -x + y + 3z = 2 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ を行列で表すと, $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

逆行列　係数行列の逆行列は，$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ だから，これを連立 1 次方程式の両辺に左からかけると，$\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. よって，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

クラメルの公式　$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 16, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8, \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ 8 だから，クラメルの公式より，$x = \frac{0}{16} = 0, y = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, z = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

解 15.4　まず，A は正則行列だから，定理**??**より，$|A| = ad - bc \neq 0$ が成り立つ．よって，$a = 0$ ならば，$b \neq 0$ かつ $c \neq 0$.

次に，逆行列を計算するため，行列 $\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$ を簡約化する．

$a = 0$ のとき, $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ に注意すると，$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \\ 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right)$ だから，$A^{-1} = -\frac{1}{bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$.

これは，$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ で $a = 0$ としたときと等しい．

$a \neq 0$ のとき，$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \to$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a}+\frac{bc}{a(ad-bc)} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \text{ だから，} A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

よって，a が 0 かどうかに関わらず，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である．

解 15.5　(1) AB は正則行列だから，$(AB)(AB)^{-1} = E$ が成り立つ．この両辺に左から A^{-1} をかけると，A が正則行列であることから，左辺は $A^{-1}AB(AB)^{-1} = EB(AB)^{-1} = B(AB)^{-1}$ となり，右辺は $A^{-1}E = A^{-1}$ となるため，$B(AB)^{-1} = A^{-1}$ が成り立つ．さらにこの両辺に左から B^{-1} をかけると，B が正則行列であることから，左辺は $B^{-1}B(AB)^{-1} = E(AB)^{-1} = (AB)^{-1}$ となるため，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成り立つ．

別解（A, B が n 次正則行列のとき，積 AB も正則行列である事実を利用せず，この事実の証明も含む証明）　A, B は正則行列だから，$AP = PA = E, BQ = QB = E$ となる行列 P, Q が存在する．このとき，$(AB)(QP) = A(BQ)P = AEP = AP = E, (QP)(AB) = Q(PA)B = QEB = QB = E$ がいえるので，AB は正則行列で，逆行列は QP である．今，$P = A^{-1}, Q = B^{-1}$ だから，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) 仮定より，A と B は積について可換だから，$AB = BA$ が成り立つ．よって，(1) より，$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ とできる．これは A^{-1} と B^{-1} が積について可換であることをいっている．

(3) 仮定より，A と B は積について可換だから，$AB = BA$ が成り立つ．よって，A が正則行列であることに注意すると，$A^{-1}B = A^{-1}BE = A^{-1}B(AA^{-1}) = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}(AB)A^{-1} = (A^{-1}A)BA^{-1} = EBA^{-1} = BA^{-1}$ とできる．これは A^{-1} と B が積について可換であることをいっている．

§16 の問題解答

解 16.1　（解答例）平均値　すべてのデータを用いる．外れ値の影響を受けやすい．常に一つだけ存在する．気温（平均気温）など，極端に大きい，あるいは，小さい値が出にくいものの代表値に適している．

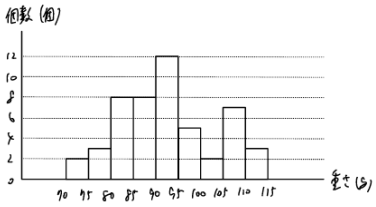
中央値　ほとんどのデータは直接反映されない．外れ値の影響を受けにくい．常に一つだけ存在する．年収の比較などで，どの辺りが多数なのかを知りたいときの代表値に適している．

最頻値　多くのデータは直接反映されない．外れ値の影響を受けにくい．複数存在する場合がある．事故の起こりやすい時間帯や，売れやすいサイズなど，一番多いのはどれかを知りたいときの代表値に適している．

解 16.2　(1)

階級 (g)	階級値	度数 (個)
70 ～ 75	72.5	2
75 ～ 80	77.5	3
80 ～ 85	82.5	8
85 ～ 90	87.5	8
90 ～ 95	92.5	12
95 ～ 100	97.5	5
100 ～ 105	101.5	2
105 ～ 110	107.5	7
110 ～ 115	112.5	3
計		50

(2)



(3)

階級 (g)	階級値	度数 (個)	相対度数	累積度数	累積相対度数
70 ～ 75	72.5	2	0.04	2	0.04
75 ～ 80	77.5	3	0.06	5	0.10
80 ～ 85	82.5	8	0.16	13	0.26
85 ～ 90	87.5	8	0.16	21	0.42
90 ～ 95	92.5	12	0.24	33	0.66
95 ～ 100	97.5	5	0.10	38	0.76
100 ～ 105	101.5	2	0.04	40	0.80
105 ～ 110	107.5	7	0.14	47	0.94
110 ～ 115	112.5	3	0.06	50	1.00
計		50	1.00		

(4) $\dfrac{1}{50}(72.5\times 2+77.5\times 3+82.5\times 8+87.5\times 8+92.5\times 12+97.5\times 5+102.5\times 2+107.5\times 7+112.5\times 3)=92.6$ より，平均値は 92.6 [g].

(5) (3) の累積相対度数分布表の累積度数の列より，階級が 90〜95 の階級値が中央値だとわかるから，中央値は 92.5 [g].

解 16.3　$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}=\bar{x}-\dfrac{\bar{x}}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\bar{x}-\dfrac{\bar{x}}{n}\cdot n=0$

解 16.4　幾何平均の例　金利の変化の平均

調和平均の例　時速（平均時速）の平均

解 16.5　10 人の平均点が 70.2 点だから，10 人の合計点は 702 点である．一方，B さんと C さんを除く 8 人の合計点は 544 点だから，B さんと C さんの合計点は 158 点である．ここで，B さんと C さんは同じ評価であるが，共に優の評価だとすると，2 人で 160 点以上でなければならない．また，共に可の評価だとすると，2 人で 118 点以下でなければならない．したがって，2 人の評価は良である．このとき，2 人の合計点が 158 点になるには，2 人とも 79 点でなければならない．以上より，B さんも C さんも 79 点であることがわかる．

§17 の問題解答

解 17.1　Test 1 と Test 2 の平均値はそれぞれ，$\overline{x_1}=\dfrac{1}{4}(2+9+5+4)=5, \overline{x_2}=\dfrac{1}{4}(4+5+6+6)=5.25$．また，分散はそれぞれ，$s_1^2=\dfrac{1}{4}(2^2+9^2+5^2+4^2)-(\overline{x_1})^2=6.5, s_2^2=\dfrac{1}{4}(4^2+5^2+6^2+6^2)-(\overline{x_2})^2=0.6875$．共分散は，$s_{12}=\dfrac{1}{4}((2-5)(4-5.25)+(9-5)(5-5.25)+(5-5)(6-5.25)+(4-5)(6-5.25))=0.5$．よって，相関係数は，$r=\dfrac{s_{12}}{s_1s_2}\fallingdotseq 0.24$.

解 17.2　(1) Test 1 と Test 2 の平均値はそれぞれ，$\overline{x_1}=\dfrac{1}{10}(3+8+10+2+4+4+2+5+7+10)=5.5, \overline{x_2}=\dfrac{1}{10}(4+5+10+4+4+2+7+8+5+7)=5.6$．また，分散はそれぞれ，$s_1^2=\dfrac{1}{10}((3-5.5)^2+(8-5.5)^2+(10-5.5)^2+(2-5.5)^2+(4-5.5)^2+(4-5.5)^2+(2-5.5)^2+(5-5.5)^2+(7-5.5)^2+(10-5.5)^2)=8.45, s_2^2=\dfrac{1}{10}((4-5.6)^2+(5-5.6)^2+(10-5.6)^2+(4-5.6)^2+(4-5.6)^2+(2-5.6)^2+(7-5.6)^2+(8-5.6)^2+(5-5.6)^2+(7-5.6)^2)=5.04$．共分散は，$s_{12}=\dfrac{1}{10}((3-5.5)(4-5.6)+(8-5.5)(5-5.6)+(10-5.5)(10-5.6)+(2-5.5)(4-5.6)+(4-5.5)(4-5.6)+(4-5.5)(2-5.6)+(2-5.5)(7-5.6)+(5-5.5)(8-5.6)+(7-5.5)(5-5.6)+(10-5.5)(7-5.6))=3.5$．よって，相関係数は，$r=\dfrac{s_{12}}{s_1s_2}\fallingdotseq 0.54$.

(2) Test 1 の平均値と分散が，それぞれ $\overline{x'_1} = \dfrac{1}{10}(3+8+10+2+4+4+9+5+7+10) = 6.2, (s'_1)^2 = \dfrac{1}{10}((3-5.5)^2+(8-5.5)^2+(10-5.5)^2+(2-5.5)^2+(4-5.5)^2+(4-5.5)^2+(9-5.5)^2+(5-5.5)^2+(7-5.5)^2+(10-5.5)^2) = 7.96$ と変わるから，共分散は，$s'_{12} = \dfrac{1}{10}((3-5.5)(4-5.6)+(8-5.5)(5-5.6)+(10-5.5)(10-5.6)+(2-5.5)(4-5.6)+(4-5.5)(4-5.6)+(4-5.5)(2-5.6)+(9-5.5)(7-5.6)+(5-5.5)(8-5.6)+(7-5.5)(5-5.6)+(10-5.5)(7-5.6)) = 4.48$ となる．よって，相関係数は，$r' = \dfrac{s'_{12}}{s'_1 s_2} \fallingdotseq 0.71.$

解 17.3　City 1 と City 2 の気温の平均値はそれぞれ，$\overline{x_1} = \dfrac{1}{4}(5+2+3+(-1)) = 2.25, \overline{x_2} = \dfrac{1}{4}(8+8+4+5) = 6.25$．また，分散はそれぞれ，$s_1^2 = \dfrac{1}{4}((5-2.25)^2+(2-2.25)^2+(3-2.25)^2+(-1-2.25)^2) = 4.6875, s_2^2 = \dfrac{1}{4}((8-6.25)^2+(8-6.25)^2+(4-6.25)^2+(5-6.25)^2) = 3.1875$．共分散は，$s_{12} = \dfrac{1}{4}((5-2.25)(8-6.25)+(2-2.25)(8-6.25)+(3-2.25)(4-6.25)+(-1-2.25)(5-6.25)) = 1.6875$．よって，相関係数は，$r = \dfrac{s_{12}}{s_1 s_2} \fallingdotseq 0.44.$

（解答例）相関係数が 0.44 なので，弱い正の相関があると考える．

解 17.4　コーシー・シュワルツの不等式で，$a_k = x_k - \bar{x}, b_k = y_k - \bar{y}$ とおくと，$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(y_k-\bar{y})^2\right)$．この両辺に $\dfrac{1}{n^2}$ をかけると，$\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})\right)^2 \leq \left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\bar{y})^2\right)$．よって，$s_{xy}^2 \leq s_x^2 s_y^2$ がいえるから，$\left(\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}\right)^2 \leq 1$．したがって，$r^2 \leq 1$ がいえるが，これは $-1 \leq r \leq 1$ を意味する．

§18 の問題解答

解 18.1　$A = \{4, 8, 12\}, B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ だから，$A \cap B = \emptyset$．これは A と B が互いに排反であることをいっている．

解 18.2　$A \cap B \neq \emptyset, P(A \cup B) = 1, P(A) = 3P(B), P(A \cap B) = \dfrac{1}{3}(1 - P(B))$ である．加法定理より，$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ だから，$1 = 3P(B) + P(B) - \dfrac{1}{3}(1 - P(B))$．よって，$P(B) = \dfrac{4}{13}$．したがって，$P(A) = 3P(B) = \dfrac{12}{13}$.

解 18.3　(1) $0.2 \times 0.4 = 0.08$ より，8%

(2) (1) より，B 町でペットを飼っているのは，A 市の 8% の家庭である．A 市のうち，B 町以外でペットを飼っている家庭は，$0.8 \times 0.2 = 0.16$ より，16% である．よって，A 市でペットを飼っている家庭は，$8 + 16 = 24$ [%] である．したがって，求める確率は，$\dfrac{0.08}{0.24} = \dfrac{1}{3}$.

(3) B 町でイヌを飼っている家庭は，$0.2 \times (0.4 \times 0.4) = 32 \times 10^{-3}$ より，A 市の 3.2% である．A 市のうち，B 町以外でイヌを飼っている家庭は，$0.8 \times (0.2 \times 0.4) = 64 \times 10^{-3}$ より，6.4% である．したがって，求める確率は，$\dfrac{32 \times 10^{-3}}{32 \times 10^{-3} + 64 \times 10^{-3}} = \dfrac{1}{3}$.

§ 19 の問題解答

解 19.1　$E[X] = \dfrac{7}{2}$ より，$E[Y] = E[2X + 3] = 2E[X] + 3 = 2 \times \dfrac{7}{2} + 3 = 10$．また，$V(Y) = 45$ より，$V(Y) = V(2X + 3) = 4V(X) = 4 \times 45 = 180$．よって，$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 6\sqrt{5}$.

解 19.2　X は $B\left(25, \dfrac{2}{5}\right)$ に従うから，$E[X] = 25 \times \dfrac{2}{5} = 10, V(X) = 25 \times \dfrac{2}{5} \times \left(1 - \dfrac{2}{5}\right) = 6$．また，$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ より，$E[X^2] = 6 + 10^2 = 106$.

解 19.3　$\mu = E[X]$ とおく．

離散的確率変数のとき　$V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} ((x_i)^2 - 2x_i\mu + \mu^2) p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 p_i - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \times 1 = E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2$.

連続的確率変数のとき　$V(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\mu + \mu^2) f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \times 1 = E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2$.

解 19.4　$f(x)$ が確率密度関数であるためには，$f(x) \geq 0$ かつ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ であればよい．

(1) グラフをかけば $f(x) \geq 0$ はわかる．しかし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} (x + 1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{3}{2} \neq 1$ だから，$f(x)$ は確率密度関数になり得ない．

(2) $0 < x < 1$ で $f(x) < 0$ だから，$f(x)$ は確率密度関数にはなり得ない．

(3) まず，$g(x) = -\dfrac{1}{9}x^3 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{18}$ のグラフをかけば，$0 \leq x \leq 2$ で $g(x) > 0$ がわか

るため，$f(x) \geq 0$ がわかる．

次に，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{7}{18}\right) dx = \left[-\frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{18}x\right]_0^2 = 1$ である．したがって，$f(x)$ は確率密度関数になり得る．

このとき，$E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{18}x\right) dx = \left[-\frac{1}{45}x^5 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{36}x^2\right]_0^2 = \frac{43}{45}$．また，$E[X^2] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{9}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{18}x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{54}x^6 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{7}{54}x^3\right]_0^2 = \frac{32}{27}$ だから，$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{32}{27} - \left(\frac{43}{45}\right)^2 = \frac{551}{2025}$．

解 19.5　期待値を $E[X]$，分散を $V(X)$，標準偏差を $\sigma(X)$ とする．

$E[X] = 300 \times \frac{5}{100} + 100 \times \frac{10}{100} + 50 \times \frac{20}{100} + 0 \times \frac{65}{100} = 15 + 10 + 10 + 0 = 35$ [円].

$E[X^2] = 300^2 \times \frac{5}{100} + 100^2 \times \frac{10}{100} + 50^2 \times \frac{20}{100} + 0^2 \times \frac{65}{100} = 4500 + 1000 + 500 + 0 = 6000$ より，$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 6000 - 35^2 = 4775$．よって，$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4775} = 69.101\cdots \fallingdotseq 69$ [円].

解 19.6　(1) $f(x) = \begin{cases} x+1, & (1 < x < a) \\ 0, & (\text{others}) \end{cases}$ である．$a > 0$ より，$f(x) \geq 0$ だから，$f(x)$ が確率密度関数ならば，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ が成り立てばよい．よって，$1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^a (x+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^a = \frac{1}{2}a^2 + a - \frac{3}{2}$ より，$a^2 + 2a - 5 = 0$．これを解くと，$a = -1 \pm \sqrt{6}$ であるが，$a > 0$ より，$a = -1 + \sqrt{6}$.

(2) $E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^a x(x+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_1^a = \frac{1}{6}(2a^3 + 3a^2 - 5) = \frac{1}{6}(a-1)(2a^2 + 5a + 5)$．ここで，$a$ は $a^2 + 2a - 5 = 0$ をみたすから，$2a^2 + 5a + 5 = a + 15$．よって，$(a-1)(2a^2 + 5a + 5) = (a-1)(a+15) = a^2 + 14a - 15 = 12a - 10$ より，$E[X] = \frac{12a - 10}{6} = \frac{-11 + 6\sqrt{6}}{3}$.

解 19.7　(1) 求める確率を p_1 とすると，$p_1 = {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16} \fallingdotseq 0.31$.

(2) 今の場合，$B\left(500, \frac{1}{2}\right)$ に従うが，今は 500 を十分大きいとしてよいから，ラプラスの定理より，近似的に $N(250, 125)$ に従うとできる．$Z = \frac{X - 250}{\sqrt{125}}$ とおくと，求める確率 p_2 は，$p_2 \fallingdotseq P(230 \leq X \leq 270) = P\left(\frac{-20}{\sqrt{125}} \leq Z \leq \frac{20}{\sqrt{125}}\right) = 2 \times P\left(0 \leq Z \leq \frac{4}{\sqrt{5}}\right) = 2 \times$

$P\,(0 \leq Z \leq 1.788\cdots)$．標準正規分布表より，$P(0 \leq Z \leq 1.78) = 0.4625, P(0 \leq Z \leq 1.79) = 0.4633$だから，$2 \times P(0 \leq Z \leq 1.78) = 0.9250, 2 \times P(0 \leq Z \leq 1.79) = 0.9266$. よって，$p_2 \fallingdotseq 0.93$.

解 19.8　(1) 1が出る確率をp_1，6が出る確率をp_6とおくと，$p_1 = \dfrac{1}{6}p_6$，$p_1 + p_6 = 1$. よって，$\dfrac{1}{6}p_6 + p_6 = 1$ より，$p_6 = \dfrac{6}{7}$．また，$p_1 = \dfrac{1}{7}$．したがって，求める確率 p は，$p = {}_5C_2\left(\dfrac{1}{7}\right)^2\left(\dfrac{6}{7}\right)^3 = \dfrac{2160}{16807} \fallingdotseq 0.129$ だから，12.9%.

(2) 1が出る確率は$\dfrac{1}{6}$だから，求める確率pは，$p = {}_5C_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{1250}{7776} \fallingdotseq 0.161$. よって，16.1%.

解 19.9　(1) 当たりは100本中35本だから，当たりを引く確率は，$\dfrac{35}{100} = \dfrac{7}{20}$.

(2) 2等以上は5本あるので，3等を1本引いた後に2等以上が当たる確率は，$\dfrac{5}{99}$.

(3) $E[X] = \dfrac{1}{100}(50000 \times 1 + 10000 \times 1 + 5000 \times 3 + 1000 \times 10 + 100 \times 20) = 870$ [円].

(4) $E[X^2] = \dfrac{1}{100}(50000^2 \times 1 + 10000^2 \times 1 + 5000^2 \times 3 + 1000^2 \times 10 + 100^2 \times 20) = 26852000$ より，$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 26852000 - 870^2 = 26095100$（**注**：分散は単位なし）．また，$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 5108.33\cdots \fallingdotseq 5108$ [円].

(5)（解答例）870円より高い値段で売って，全部売れれば損をしないが，キリのよい金額で，1本あたりの儲けもそこそこ出ることから，1本1000円で売る．

(6) 期待値が300円より小さくなれば，全部売れたときに損をしない．つまり，はずれをn本とするとき，$\dfrac{1}{n+35}(50000 \times 1 + 10000 \times 1 + 5000 \times 3 + 1000 \times 10 + 100 \times 20) \leq 300$ をみたせばよい．よって，$\dfrac{87000}{n+35} \leq 300$ より，$n \geq 255$．したがって，はずれを255本以上にすれば，全部売れたときに損をしない．

（解答例）しかし，全部売れるとは限らないため，少し余裕を持たせたい．当たりが35本に対し，はずれが多すぎても売れなくなるため，全部で400本として，はずれを365本とする．

解 19.10　(i) $E[X] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$.

$i = k-1$とおくと，$E[X] = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{i!(n-(i+1))!} p^{i+1}(1-p)^{n-(i+1)} = np \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i))!} p^i (1-p)^{n-1-i} = np \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} {}_{n-1}C_i p^i (1-p)^{n-1-i}$．ここで，二項定理より，$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} {}_{n-1}C_i p^i (1-$

$p)^{n-1-i} = (p+(1-p))^{n-1} = 1$ だから，$E[X] = np$.

(ii) $E[X^2] = E[X(X-1)+X] = E[X(X-1)] + E[X]$. $E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$. $i = k-2$ とおくと，

$E[X(X-1)] = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n!}{i!(n-(i+2))!} p^{i+2}(1-p)^{n-(i+2)} = n(n-1)p^2 \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{i!(n-2-i))!} p^i (1-p)^{n-2-i} = n(n-1)p^2 \sum_{i=0}^{n-2} {}_{n-2}C_i p^i (1-p)^{n-2-i}$. ここで，二項定理より，$\sum_{i=0}^{n-2} {}_{n-2}C_i p^i (1-p)^{n-2-i} = (p+(1-p))^{n-2} = 1$ だから，$E[X] = n(n-1)p^2$. よって，$E[X^2] = E[X(X-1)+X] = E[X(X-1)] + E[X] = n(n-1)p^2 + np$ だから，$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$.

（お疲れさまでした）【終】