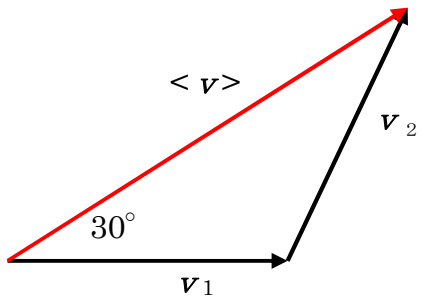
「初歩の物理」補充問題解答

第１章

(1) この人の現在位置は、1 辺 2 km の長さが等しい 2 つの辺で挟まれる、角が 120° となる 2 等辺三角形の底辺の端なので、原点から 3 km 東、$\sqrt{3}$ km 北であり、原点からの直線距離が $2\sqrt{3}$ km となることから、平均速度は時速 $2\sqrt{3}$ ＝3.464 km である。平均速度< $\boldsymbol{v}$> （ベクトル）は最初の 30 分間の速度を $\boldsymbol{v}_1$、次の 30 分間の速度を $\boldsymbol{v}_2$ とすれば

$$<\boldsymbol{v}> = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

で表される。



(2) 光が光速 c で長径 r を伝わる時間を t とすると $c = r/t$ より

$t = r/c = 9.5\times10^{20}/3\times10^{8} = 3.15\times10^{12}$ ［s］

(3) 上の問題と同様に $c = r/t$ より

$r = c\ t = 8.8\times3\times10^{8} = 2.64\times10^{9}$ [m]

(4) 1 モルには 6×10^{23} 個の原子が含まれているので、縦、横、高さのそれぞれの方向に $\sqrt[3]{6\times10^{23}} = 8.44\times10^{7}$ 個ずつ原子を並べていけばよい。

$a = 2\times0.503\times10^{-10}\times8.44\times10^{7} = 8.9\times10^{-3}$ [m]

(5) (a) 地球の半径を r とすると、自転は 1 日かかって $2\pi r$ の距離だけ動くので、この速度は

$v_a = 2\pi\cdot6378\times10^{3}/24\cdot60\cdot60 = 4.638\times10^{2}$ [m/s]

(b) 地球の公転の平均半径を R とすると、地球は 1 年かかって $2\pi R$ の距離だけ動くので

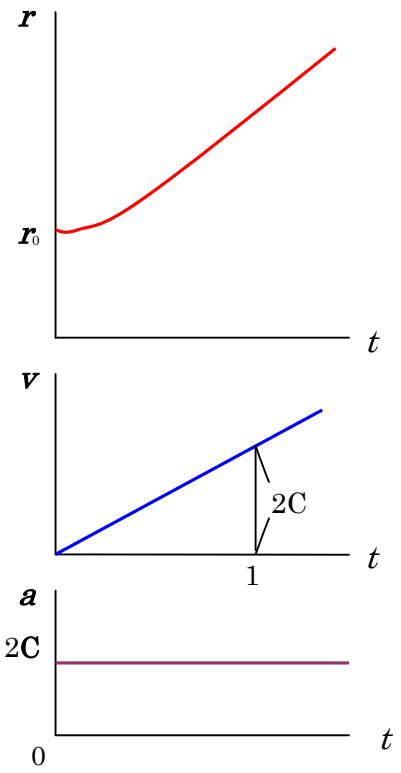
$v_b = 2\pi\cdot1.496\times10^{11}/365\cdot24\cdot60\cdot60 = 2.98\times10^{4}$ [m/s]

$\therefore v_b/v_a = 64.3$

(6) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を時間 t で微分すれば速度が、さらにその速度をもう一度時間 t で微分すれば加速度となることから

$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = 2\mathbf{C}t$ 、 $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt = 2\mathbf{C}$

グラフは次のようになる。



(7) 前問と同様に、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を時間 t で微分すれば速度が、さらに、その速度をもう一度時間 t で微分すれば加速度となることから

$v = dr/dt = 2\pi f r_0 \cos 2\pi ft$

$a = dv/dt = -(2\pi f)^2 r_0 \sin 2\pi ft$

これらより、速度の最大値は振動数（周波数） f に、また、加速度の最大値は f^2 に比例することがわかる。

第 2 章

(1) 車の質量 m と加速度 a がわかっているので、車に加わっている力 F および F と mg との比は

$F = ma = 10^3$[kg]・2×10^3 /(60×60) [m]/1[s]$=5.56\times10^2$ [N]

$F/mg = 5.56\times10^2/(9.8\times10^3) = 5.67\times10^{-2}$

(2) 万有引力は $F=-Gm^2/r^2$ で表されるので、これに $G=6.673\times10^{-11}$ と与えられた m、r を代入して

$F=-Gm^2/r^2$

$= -6.673\times10^{-11} \times (1.673\times10^{-27})^2/(10^{-9})^2$

$=-1.8677\times10^{-46}$ [N]　（引力）

(3) 前問と同様に $F=-Gm^2/r^2$ に $G=6.673\times10^{-11}$、与えられた m、r、R を代入して

$F_{E-M}=-GMm/r^2$

$= -6.673\times10^{-11}\times5.974\times10^{24}\times7.348\times10^{22}/(3.8\times10^5\times10^3)^2$

$=-2.029\times10^{20}$ [N]

$F_{E-S} = -GMm/R^2$

$= -6.673\times10^{-11}\times1.989\times10^{30}\times5.974\times10^{24}/(1.5\times10^{8}\times10^{3})^2$

$= -3.524\times10^{22}$ [N]

$F_{E-S}/F_{E-M} = 173.7$

(4) 車の加速度を a、質量を m とすると、車に加わっている力は $F=ma$ であり、これが摩擦力 $F=\mu mg$ を超えるとスリップする。したがってギリギリの条件は、

$ma=\mu mg \quad \therefore\ a = 0.5g = 4.9$ [m/s^2]

(5) 複数の力が同時に１つの物体に働いて釣り合っている時、それらの力の総和（ベクトルの和、合力）がゼロになる。これは x、y、z の各成分の和がそれぞれゼロになることである。

$$\boldsymbol{F}a+\boldsymbol{F}b = (A_x\ \boldsymbol{i} + A_y\ \boldsymbol{j} + A_z\ \boldsymbol{k}) + (B_x\ \boldsymbol{i} + B_y\ \boldsymbol{j} + B_z\ \boldsymbol{k})$$
$$= (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k} = 0$$
$$\therefore A_x + B_x = 0,\quad A_y + B_y = 0,\quad A_z + B_z = 0$$

(6) 3 つ目の力の合力の成分を $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ とすれば、$\boldsymbol{F}_1(2, -5, 3)$、$\boldsymbol{F}_2(4, 6, -5)$ の和

$\boldsymbol{F}(x, y, z) + \boldsymbol{F}_1(2, -5, 3) + \boldsymbol{F}_2(4, 6, -5) = 0$

が 0 になることから

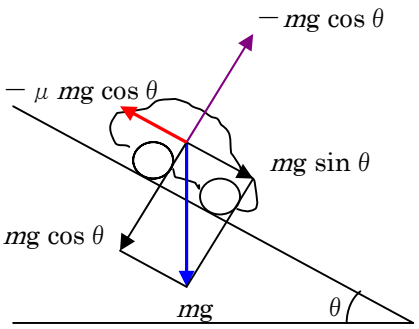
合力の x 成分；　$2+4+x=0$,　$\therefore x = -6$ [N]

y 成分；　$-5+6+y=0$,　$y = -1$ [N]

z 成分；　$3-5+z=0$,　$z = 2$ [N]

(7) 車が滑り落ちようとする力は $mg\sin\theta$、それを止めようとする静止摩擦力は $\mu mg\cos\theta$ であるから、

$\mu mg\cos\theta = mg\sin\theta$、　$\therefore \mu = \tan\theta$



(8) (a) 物体とテーブルクロスの上面と下面の両方がすべる条件は

$F > (\mu_1 + \mu_2)Mg = 0.6Mg$

(b) 物体にはテーブルクロスとの間のすべり摩擦が働いているので

$Ma = \mu_1{}' Mg = 0.1Mg \quad \therefore a = 0.1g$

物体の運動方程式は $Ma = 0.1Mg$、書き換えて $M\dfrac{d^2r}{dt^2} = 0.98M$

この解は　$r = 0.49\ t^2$

テーブルクロスについての運動方程式は

$$mA = m\frac{d^2r}{dt^2} = F-(\mu_1' + \mu_2')Mg = F-0.2\ Mg$$

この解は　$r = \dfrac{F-1.96M}{2m}\ t^2$

(c) テーブルクロスが抜けて、物体がテーブル上をすべるとき、物体が受ける力はそれを止める方向に働くすべり摩擦なので、物体の運動方程式は

$$Ma = -0.1Mg \quad \therefore\ M\frac{d^2r}{dt^2} = -0.98\,M$$

この解は　$r = -0.49\ t^2$

(d) 物体がテーブルの端に到達するまでの中間点（すなわち、$r=0.25$［m］のところ）で、ちょうどテーブルクロスの端が抜ける条件を調べればよい。

物体が中間点に達するまでの時間は $r = 0.49\ t^2 = 0.25$ より $t^2 = 0.510$、さらに、この時テーブルクロスの移動距離が 0.75［m］を越えればよい（テーブルクロスの他端は、最初はテーブルの向こう側の端にあったことに注意せよ）ので、$r = \dfrac{F-1.96M}{m}\ t^2$ に $r=0.75$、$t^2=0.510$ を代入して（等号を不等号に変えて）

$$\frac{F-1.96M}{m} > \frac{0.75}{0.510} = 1.471 \quad \text{すなわち、} \quad F > 1.96M + 1.471m$$

第３章

(1)

(a)　$V = at$　の両辺を t で積分すれば r になることから

$$r = \int_0^t V dt = \int_0^t at dt = \frac{1}{2}at^2$$

(b)　同様に $V = bt^2$　の両辺を t で積分すれば

$$r = \int_0^t V dt = \int_0^t bt^2 dt = \frac{1}{3}at^3$$

(c)　$V = ct^{-1}$　の両辺を t で積分すれば

$$r = \int_1^t V dt = \int_1^t ct^{-1} dt = c\log t$$

(d)　$V = dt^{-2}$　の両辺を t で積分すれば

$$r = \int_1^t V dt = \int_1^t dt^{-2} dt = -d(t^{-1}-1)$$

(2) 上の(1)の(c)，(d)の積分範囲を時刻 t_1 から t_2 までとすればよいので、

(c)　$r = \int_{t_1}^{t_2} ct^{-1} dt = c(\log t_2 - \log t_1)$

(d)　$r = \int_{t_1}^{t_2} dt^{-2} dt = -d(t_2^{-1} - t_1^{-1})$

(3)

(a) 求める時間を t_0 とすると、列車 A は等速運動なので $V_0 = L/t_0$ より
$t_0 = L/V_0$

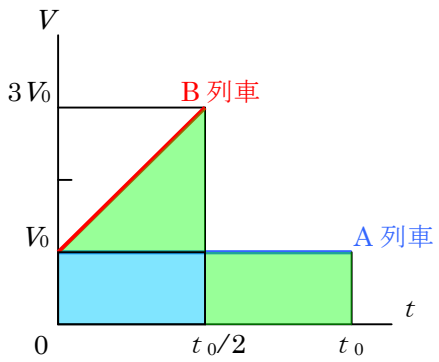
(b) 列車 B は最初 V_0 から等加速度運動をするので

$$r = \frac{1}{2} a t^2 + V_0 t$$

(c) 列車Bは半分の時間 $t = (1/2)\ t_0$ で距離 $r = L$ の地点に到着するので、上式にこれらを代入して、

$$a = \frac{8(L - \frac{1}{2}V_0 t_0)}{t_0^2} \qquad \therefore r = \frac{4(L - \frac{1}{2}V_0 t_0)}{t_0^2} t^2 + V_0 t$$

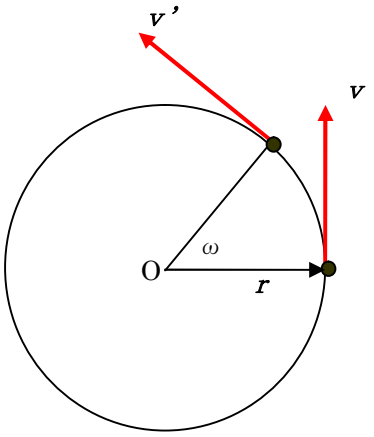
(d) 下の図のようになる。図の緑色の三角形と長方形の面積が等しい。



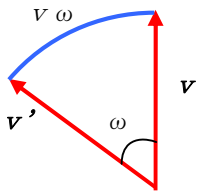
(4) (a) 角度をラジアン単位で測れば中心角 ω が見込む「円弧」の長さが 1 秒間に動いた距離 v になるので

$$v = r\omega$$

(b) 1 秒後に $\boldsymbol{r}$ ベクトルが ω だけ回転しているので下の図のようになる。



(c) $\boldsymbol{v}'$ ベクトルを平行移動してその始点を $\boldsymbol{v}$ の始点と一致させると下の図のようになり、２つのベクトルのなす角は ω となることがわかる。



(d) 上の図の円弧の長さは $v\omega$ なので $\Delta v = v\omega$ である。したがって、加速度の大きさ（１秒間の $\boldsymbol{v}$ の変化）は $a=v\omega$ となる。

(5) 車が受ける遠心力の大きさは車の質量を m として $mv\omega$ （上の(4)の(d)の答えと $F=ma$ より）、これが摩擦力に等しいとして

$$mv^2/R=\mu mg \qquad \therefore \quad v=\sqrt{\mu gR}$$

(6) 電車に加わる遠心力 $-m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ と重力 mg の合力 $\boldsymbol{F}$ に垂直にレール面を設定すればよいので、水平面からの傾き角は

$$\tan\theta = v\omega/g = v^2/Rg$$

(7) 円運動の速度は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\omega}(0,0,\omega)\times\boldsymbol{r}\ (0,r,0)\\ &=(0\cdot 0-\omega r)\boldsymbol{i}+(0\cdot 0-\omega\cdot 0)\boldsymbol{j}+(0\cdot r-0\cdot 0)\boldsymbol{k}\\ &=\boldsymbol{v}(-\omega r,\ 0,\ 0)\end{aligned}$$

加速度は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}(0,0,\omega)\times\boldsymbol{v}(-\omega r,\ 0,\ 0)\\ &=(0\cdot 0-0\cdot\omega r)\boldsymbol{i}+(0\cdot 0-\omega\cdot\omega r)\boldsymbol{j}+(0\cdot 0-0\cdot\omega r)\boldsymbol{k}\\ &=\boldsymbol{a}(0,-\omega^2 r,\ 0)\end{aligned}$$

遠心力は

$$\boldsymbol{F}=-m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}(0,m\omega^2 r,\ 0)$$

(8) 波長 λ を求めるには、波を表す式 $y=A\sin(kx-\omega t)$ の sin の中が、まず $t=0$ （または一定）とおき、次に x に $x=x+\lambda$ を代入したとき、元より 2π だけ増加すればよいことから

$$k\lambda=2\pi \qquad \therefore \lambda=2\pi/k$$

(9) 波の先端は１秒間に波長 λ を f 回足し合わせた位置まで進んでいるので

$$v=f\lambda$$

の関係が成り立つ。

(10) (a) 加えた力 F とバネの伸び x が比例すること、および力の方向は x の逆方向であるから

$$F\propto x \qquad \therefore F=-kx$$

(b) 上の式を運動方程式の形にするには F に $m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ を代入して

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

(c) サイン関数 $x=A\sin\omega t$ を上の運動方程式に代入する。ここで、

$$\frac{d(\sin\omega t)}{dt}=\omega\cos\omega t\text{、}\qquad \frac{d(\cos\omega t)}{dt}=-\omega\sin\omega t$$

の関係を思い出して、

$$\frac{d^2(A\sin\omega t)}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t=-\frac{k}{m}(A\sin\omega t)$$

この式の右辺と最右辺を比べて$\omega^2=k/m$であればよいことがわかる。このように$x=A\sin\omega t$は波の方程式の解であることが示された。

$$\therefore\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(11) 長さlの振り子の周期は(3.22)式より

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\qquad \therefore\ g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

となり、長さと周期を測ってこの式に代入すればgを求めることができる。

(12) まず、地球の表面で質量mの物体の受ける力は万有引力の式より

$$F=mg=G\frac{M_E m}{{R_E}^2}\qquad \therefore\ \text{地球の質量は}\quad M_E=\frac{{R_E}^2 g}{G}$$

この式で地球の半径R_E、万有引力の定数G、重力加速度gは地球上で測定できるので、地球の質量を求めることができる。

次に、月の表面で質量mの物体が受ける力は

$$F=mg'=G\frac{M_M m}{{R_M}^2}\qquad \therefore\ \text{月の質量は}\quad M_M=\frac{{R_M}^2 g'}{G}\qquad (1)$$

一方、月の回転周期Tは地球から測ることができるので、地球と月の間に働く万有引力と回転の遠心力が釣り合うことから

$$G\frac{M_E M_M}{R^2}=M_M R\omega^2\qquad \therefore\ \text{月までの距離は}\ R=\sqrt[3]{\frac{GM_E}{\omega^2}}$$

となり、このRは求めることができる。さらに、地球から月の直径を見込む角度は望遠鏡などを使って測定することができるので、この角をθとすると月の半径は

$$R_M=\frac{R\theta}{2}$$

から求めることができる。これを(1)に代入し、さらに月面上で振り子を振らせる実験をすれば、その周期Tを測定して

$$g'=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

が得られるので、これらより月の質量M_Mが求められる。

$$M_M=\frac{{R_M}^2 g'}{G}=\frac{g'\theta^2}{4G}\sqrt[3]{\frac{G^2{M_E}^2}{\omega^4}}=\frac{g'\theta^2}{4}\sqrt[3]{\frac{{M_E}^2}{G\omega^4}}$$

第４章

(1) $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$ より仕事の単位は[N/m]である。したがって、[N/m]＝[J]（ジュール）となる。

(2) エネルギーとは、「仕事をすることができる能力」である。したがって、ある量のエネルギーがあれば、それに相当する仕事をしたり、熱を発生させたりすることができる。

(3) ある物体に外から仕事をすると、その仕事に相当するエネルギーを物体が得ることができる。また、エネルギーを持った物体は、そのエネルギーに相当する仕事をすることができる。

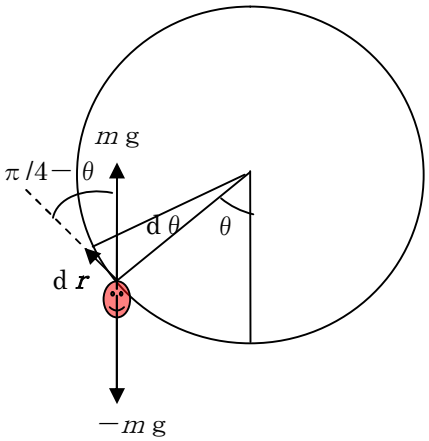
(4) 斜面に沿って物体を押し上げる力は $mg\sin\theta$ であればよいから

$$W=mgx\sin\theta$$

(5) (a) 観覧車に乗っている人は重力 mg に抗して高さ２Rだけ持ち上げられているから

$$W=mg\cdot 2R=50\cdot 9.8\cdot 2\cdot 20=1.96\times 10^4\ [\mathrm{J}]$$

となる。



実際に確かめるには、図のように出発点からの観覧車の回転角を θ とおき、そこから微小距離 $d\boldsymbol{r}$ だけ動く時の仕事

$$dW=mg\,dr\cos(\pi/4-\theta)=mg\sin\theta\,dr$$

に　$dr=R\,d\theta$　の関係を代入し、$\theta=0$ から π まで積分すればよい。

$$W=\int_0^{\pi} mgR\sin\theta d\theta=mgR\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}=mg\cdot 2R$$

(b) 上の式で $\theta=\omega t$、$d\theta=\omega\,dt$ とおき、積分範囲を０から t までとすれば

$$W=\int_0^{t} mgR\omega\sin\omega t dt=mgR\left[-\cos\omega t\right]_0^{t}=mgR(1-\cos\omega t)$$

(c) このときの仕事率（消費電力）は上の式を t で微分して

$$P=\frac{dW}{dt}=mgR\omega\sin\omega t$$

(6) (a) 摩擦や空気抵抗がないため、エネルギー保存則が成り立ち、

$$mgR = mv^2/2 \qquad \therefore v = \sqrt{2gR}$$

このときに乗客が受ける遠心力は

$$F = mv^2/R = 2mg$$

したがって、乗客の体重は普段の 3 倍になっているように見える。

(b) A 駅を出発してから t 秒後に、A 駅と B 駅を結ぶ線の中点から列車を見込む角を θ とおけば

$$mgR\sin\theta = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \therefore \quad v = \sqrt{2gR\sin\theta}$$

乗客が受ける遠心力は、水平面から θ だけ傾いた方向に

$$F = mv^2/R = 2mg\sin\theta$$

この力の水平方向成分と鉛直方向成分はそれぞれ

$$2mg\sin\theta \cdot \cos\theta、\quad 2mg\sin\theta \cdot \sin\theta$$

一方、乗客が感じる地球からの重力 mg は鉛直方向であるので、この 2 つの力の合力の大きさは

$$F = 2mg\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta + (\sin^2\theta + 1/2)^2}$$

(c) A 駅を静かに出発してから任意の角 θ の位置までの所要時間 t [s] を求めるには、θ の位置での列車の速度（(b)の答え）

$$v = \sqrt{2gR\sin\theta}$$

を t で積分すればよい。（一般的に $x = \int_0^t v\,dt$ となることを学んだ） しかし、上の式は t で直接積分できる形にはなっていないので、t で表される形にしなければならない。

そのために、$v = R\,d\theta/dt$ の関係を用いて

$$R\,d\theta/dt = \sqrt{2gR\sin\theta} \qquad \therefore \quad \sqrt{\frac{R}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = dt$$

両辺に積分記号をかけて θ が 0 から θ まで積分して

$$t = \sqrt{\frac{R}{2g}}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$$

と求められる。最後に、この式の中で $\theta = \pi$ とおけばよい。

(7) どちらの物体（質点）についても万有引力は

$$F = -GMm/r^2$$

であるから、位置エネルギーについても両者で同じ形で表され

$$U = -\int_{r_0}^{r} -\frac{GMm}{r^2}dr$$

位置エネルギーの基準点 r_0 は $r_0 = 0$ にとることはできない。この場合、$r_0 = \infty$ を基準点にとる。

$$U = -\left[\frac{GMm}{r}\right]_\infty^r = -\frac{GMm}{r}$$

(8) どちらの場合でも、高さが 1/2 になったとき、失った位置エネルギーは $mgh/2$ であり、これが運動エネルギーに変わっているので、結局、位置エネルギーと運動エネルギーの比は 1 : 1 である。

第５章

(1) 運動量$\boldsymbol{P}$は「運動のいきおい」を表す物理量で、運動している物体の質量mが大きいほど、また、速度$\boldsymbol{v}$が速いほど「運動のいきおい」は大きい。$\boldsymbol{P}$はmと$\boldsymbol{v}$に比例し、その比例定数を１と決められている。

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$$

また、$\boldsymbol{P}$の方向は$\boldsymbol{v}$の方向と同じである。さらにこの式から、$\boldsymbol{v}$が変化しない限り、言い換えれば加速度が０であれば、すなわち外力が加わらない限り運動量は変化しない。

(2) 運動方程式 $m\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}$ の $\mathrm{d}t$ を右辺に移項し、両辺に積分記号を掛ければ（等式の両辺に同じ操作をしても、等式は成り立つことから）

$$\int_{v_0}^{v_1} mdv=\int_{t_0}^{t_1} Fdt$$

この左辺は積分できるので

$$m\boldsymbol{v}_0-m\boldsymbol{v}_1=\int_{t_0}^{t_1} Fdt$$

ここで、外力が加わらない場合には、すなわち、この式の右辺が０の場合には運動量の変化も０であることが示される。

(3) ２つの物体の１次元衝突で、衝突後のそれぞれの物体の速度はテキストの(5.6)で表されているので、これに$m_2=2m$, $v_2=0$, $e=0.7$を代入し、

$$V_1'=\frac{(m-0.7\times 2m)v+2m(1+0.7)\times 0}{m+2m}=-\frac{0.4}{3}v$$

$$V_2'=\frac{m(1+0.7)v+(2m-0.7m)\times 0}{m+2m}=\frac{1.7}{3}v$$

(4) 角運動量$\boldsymbol{L}$は「回転のいきおい」を表す物理量で、回転している物体の質量mが大きいほど、また、速度$\boldsymbol{v}$が速いほど、さらに回転の中心から見た質量mがある位置の位置ベクトル$\boldsymbol{r}$（すなわち回転半径）が大きいほど「回転のいきおい」は大きい。$\boldsymbol{L}$はmと$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{r}$に比例し、その比例定数は１と決められている。また$\boldsymbol{L}$は$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{v}$のなす角θが直角であるとき最大であり、平行であるとき（この場合はもはや回転はしていない）０とならなければならない、すなわち$\sin\theta$にも比例するので、

$$L=mrv\sin\theta$$

これをベクトル式で表すと

$$\boldsymbol{L}=m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$$

また、$\boldsymbol{L}$は$\boldsymbol{r}$にも$\boldsymbol{v}$にも直角であり、その方向は右ねじの方向（$\boldsymbol{r}$から$\boldsymbol{v}$の方向に右ねじを回して、それが進む方向）と定義されている。

次に、$\boldsymbol{L}$が保存される、すなわち時間変化しない（$\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t=0$となる）条件を調べるには、上の式をｔで微分して

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t&=m\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t\times\boldsymbol{v}+m\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t\\&=m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times m\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t\\&=\quad 0\quad+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\quad=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\end{aligned}$$

この式の最右辺は回転力（トルク）であり、「外から回転力が加わらない限り、角運動量は保存される」ことが示された。

(5) 回転の運動方程式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

は「外から回転力が加えられると角運動量が変化する」ことを示している。

(6)

地球の質量　$m=5.974\times10^{24}$ [kg]

公転速度　　$v=r\omega=1.496\times10^{11}\cdot 2\pi/(365\cdot24\cdot60\cdot60)$　[rad・s]

平均半径　　$r=1.496\times10^{11}$ [m]

を $L=mrv=mr^2\omega$　に代入して

$$L=5.974\times10^{24}\times(1.496\times10^{11})^2\cdot 2\pi/(365\cdot24\cdot60\cdot60)$$
$$=2.664\times10^{40}\ [\mathrm{kgm^2/s}]$$

(7) 必要な物理定数は

電子の質量；　$m_e=9.1\times10^{-31}$ [kg]

電気量；　$e=-1.6\times10^{-19}$ [C]

真空の誘電率；$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ [F/m]

Bohr 半径；　$a_0=0.53\times10^{-10}$ [m]

まず、回転している電子の速度 v を求めるために、向心力 $F=mr\omega^2=mv^2/r$ がクーロン力によって発生していることを表す式（これを「クーロン力＝遠心力 で釣り合っている」と考えてもよい）より

$$\frac{mv^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\therefore\ v=\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 rm}}=\sqrt{\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{4\pi\times8.854\times10^{-12}\times0.53\times10^{-10}\times9.1\times10^{-31}}}$$
$$=2.18\times10^6\ [\mathrm{m/s}]$$

この値を用いて角運動量は

$$L=mrv=9.1\times10^{-31}\times0.53\times10^{-10}\times2.18\times10^6$$
$$=1.05\times10^{-34}\ [\mathrm{kgm^2/s}]$$

第６章

(1) 静電気を利用した物理分野の装置としては、バンデグラーフと呼ばれる加速器がある。小型のものは高電圧発生装置として使われ、物理学実験の授業で手軽に高電圧を得るのに利用されている。

日常生活の上では、静電気は邪魔になる場合がほとんどである。冬の乾燥した時期にセーターを脱ぐときなど、火花が見えることもある。ガソリンスタンドで車にガソリンを入れる場合、体にたまった静電気をアースに逃がして火災事故を防ぐ。

(2) 電磁気学において、電気と磁気でクーロンの法則などで使用する単位系が歴史的に別々に定められてきたが、電磁気学の中に登場するすべての法則や定理を表す数式を MKS-SI 単位系で統一した場合に、できるだけ複雑にならないように工夫されたものである。クーロンの法則の比例定数を１文字で表すと、それ以後登場する法則や数式は次第に複雑になってくる。

(3) クーロンの法則

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

に $q_1=q_2=1$ [C]、$F=1$ [N]を代入して、

$$r=\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1^2}{1}}=9.48\times10^4\ [\mathrm{m}]$$

同様に、$q_1=q_2=1$ [C]、$F=2$ [N]を代入して

$$r = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1^2}{2}} = 6.70\times10^4 \quad [\mathrm{m}]$$

(4) (c) クーロン力で反発するので加速され速度は増加するが、次第に距離が遠ざかり、反発力は弱くなるので加速度は弱まり、やがて一定速度になる。

(5) 点電荷Qが距離rの所に作る電場の強さを表す式に$q=1$を代入して

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}(\boldsymbol{r}/r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{1^2} = 9 \times 10^9 \quad [\mathrm{V/m}]$$

(6) 一様な電場Eの空間で電気量qを帯びた粒子は$F=qE$の一定の力を受けるので、加速度

$$a = qE/m$$

で等加速度運動をする。

(7) この球面上の電場の強さは

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{1}{1^2} = 9 \times 10^9 \quad [\mathrm{V/m}]$$

したがって、1 m^2あたりの電気力線の本数は9×10^9 [本]である。

球面全体では、球の表面積$4\pi R$（$R=1$ [m]）を掛けて 1.13×10^{11}[本]となる。

(8) 電位ϕは電場中に置かれた1C の電荷がもつ電気的な位置エネルギーのことである。電場の中に置かれた電荷は電場から力を受けて、電場による位置エネルギーを持つ。電気の場合、電場中で+1 [C] の電荷が持つ位置エネルギーを**電位**（電気的ポテンシャル）といい、力学での位置エネルギー

$$U = -\int_{r_0}^{r} F dr$$

に対応して、$q = +1$ [C] を（2-1-4）に代入した$\boldsymbol{F} = 1\boldsymbol{E}$を用いて、

$$\phi = -\int_{r_0}^{r} E dr$$

で表される。

(9) 電場Eがわかっていて、この量から電位ϕを求めるには

$$\phi = -\int_{r_0}^{r} E dr$$

を用いて、基準点（電位を0と決める点）から電位を求める点rまで電場Eのr方向成分を積分すればよい。

(10) 電位ϕは電場Eのr方向成分をrで積分した量なので、その逆に電位ϕから電場Eを求めるには、ϕをrで微分すればよい。ここでrの方向はもともと任意なので、(x, y, z) の各座標軸方向に選ぶことができる。したがって

$$E_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$E_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$E_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

から電場の３方向成分を求めることができる。ここで偏微分記号を用いたが、この意味は、例えば最初の式では、ϕの中に現れるyやzの関数は定数とみなし、xについてのみ微分をすればよい。

(11) 正の電気を帯びた粒子が電場の方向に移動しているので、電圧は

$$V = E\,d$$

だけ減少する。

正の電荷は電場の方向に力を受けるので、この方向に移動した場合には粒子の位置エネルギーは$q\,E\,d$だけ減少し、電場からエネルギーを受け取り、それを外に仕事や熱として放出するか、あるいは粒子自身の運動エネルギーに変わったかのどちらかになる。ここでは粒子は運動エネルギーを得ている。このエネルギーは電場から与えられたものである。

(12) (a) 正電荷Qから距離rだけ離れた所の電場の強さは

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

であり、ここから正の電気量qを帯びた質量mの粒子が距離dだけ外側に移動したことになるので

$$\mathrm{V} = \int_r^{r+d} E dr = \int_r^{r+d} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_r^{r+d}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r+d} - \frac{1}{r}\right) = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r(r+d)}$$

だけ粒子の電圧は低下する。

このとき粒子が得るエネルギー（運動エネルギー）は

$$q\,V = \frac{qQd}{4\pi\varepsilon_0 r(r+d)}$$

(b) もとの固定されていた位置で、粒子を静かに離すと反発して遠ざかってゆく。十分離れたところ、すなわち上の式でｄ→∞での粒子が得るエネルギーは

$$\lim_{d\to\infty} \frac{qQd}{4\pi\varepsilon_0 r(r+d)} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

これが粒子の運動エネルギーになるので、その時の速度は

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

より

$$v^2 = \frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 rm} \qquad \therefore\ v = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 rm}}$$

(13) 容量 3,000 μF のコンデンサーに 100V の電圧を加えて十分時間をかけて充電したとき、コンデンサーに貯まった電気量は

$Q = C\,V = 3000\times10^{-6}\times100 = 3\times10^{-1}$ [C]

このときコンデンサーに蓄えられたエネルギーは

$U = (1/2)\,C\,V^2 = 15$ [J]

(14) 電圧 Vで充電された平行板コンデンサー（極板の面積 S、極板間の距離 d）の極板間に蓄えられているエネルギーは

$$U=(1/2)\,C\,V^2$$

で表される。このエネルギーを体積１㎥あたりにすると極板間の空間のエネルギー密度は

$$U/Sd=(1/2)\,C\,V^2/Sd$$

この式に平行板コンデンサーの容量を表す式

$$C=\varepsilon_0 S/d$$

を代入し、さらに $V=Ed$ の関係を利用して

$$U/Sd=(1/2)\,C\,V^2/Sd=(1/2)(\varepsilon_0 S/d)(Ed)^2/Sd$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

電場 E が存在する空間には、何もない真空中であっても、このような密度でエネルギーが存在するのである。

第７章

(1) 電気量（電荷）Qを知っていて、この物理量から電流を定義するには、電流が流れている導線のある仮想的な断面を考え、そこを１秒間に通過する電気量を電流とすればよい。いま、dt 秒間に dQの電気量が通過したとき、電流は

$$I=\frac{dQ}{dt}$$

と表される。

(2) ある場所（たとえばコンデンサーの電極）に電流が流れ込んでいる。電流 I がわかっていて、貯まった電気量 Q は、微分の逆の操作、つまり積分により

$$Q=\int_0^t I dt$$

から求められる。

(3) 電流１[A] が流れている導線の、ある（仮想的な）断面は１秒間に１[C] の電気量が通過している。電子１個が帯びている電気量（電荷素量という）は $e=-1.602\times10^{-19}$ [C] であるので１秒間に

$$n=1/1.602\times10^{-19}=6.242\times10^{18}\ \text{個}$$

の電子が電流の方向と逆向きに通過しているか。

(4) 鉄や銅など色々な金属がどれくらい電気を通しにくいか、あるいは通しやすいかを比べたいとき、金属線の長さと太さ（断面積）を同じにして比べればよい。長さ l、太さ（断面積）Sの導線の抵抗は l に比例し、Sに反比例するので、その比例定数を ρ とおいて

$$R=\rho\frac{l}{S}$$

と表される。ρ は電気抵抗率とよばれ、単位長さ、単位断面積あたりの抵抗である。

(5) 導線を電池につないで電圧をかけると電流が流れるが、導線中には電荷の流れを妨げようとする要素がたくさん存在する。導線の中の原子は熱エネルギーによりたえず振動している（熱振動とよぶ)。金属導線中には不純物原

子や格子欠陥とよばれる原子の配列の乱れなどにより、電荷の通り道が妨げられる。電荷はたえずこのようなじゃまものに衝突しながら進んでいるので、平均して、加速度を持たないで、一様に流れてゆく。

(6) この合成抵抗を電圧 V の電池につないで、それぞれの抵抗を流れる電流を I_1、I_2、I_3 とし、全体の電流を I とすると

$$V = RI = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3$$

$$\therefore\ I_1 = RI/R_1 \qquad I_2 = RI/R_2 \qquad I_3 = RI/R_3$$

$$\therefore\ I = I_1 + I_2 + I_3 = RI(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)$$

$$\therefore\ R = (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)^{-1}$$

(7) 3 つの抵抗を流れる電流をそれぞれ I_1、I_2、I_3 とする。
電池→R_1→R_2 の回路網を 1 周すれば

$$V - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

R_2 と R_3 とを 1 周する回路網について

$$R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$$

R_1 と合成抵抗とのつなぎ目の部分で

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad \therefore\ I_1 = I_2 + I_3$$

この 3 つの式を連立させて

$$I_2 = \frac{R_3 V}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$I_3 = \frac{R_2 V}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

第８章

(1) 磁気量 1 [Wb] を帯びた 2 つの磁荷が互いに 1 m離れて置かれているとき、これらの間に働く力の大きさは磁気に関するクーロンの法則より

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m'_1 m'_2}{r^2} = 6.33\times10^4 \frac{1\times1}{1^2} = 6.33\times10^4 \quad [\mathrm{N}]$$

(2) 真空中に固定されている磁気量 m' [Wb] が距離 r [m] だけ離れた位置に作る磁場の強さ H は、別のもう一つの磁気量 m_1' をその場所に持ってきたとき、その磁気量に働く力が

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m'}{r^2} m_1' = Hm_1'$$

の関係になるように決められている。したがって、

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m'}{r^2}$$

と表され、その次元は F/m_1' となり、単位は [N/Wb] であることがわかる。

(3) 半径 R の円形の導線に電流 I が流れているとき、円の中心の磁場の強さはビオ - サバールの法則

$$\mathrm{d}H = \frac{1}{4\pi}\frac{Idx\sin\theta}{R^2}$$

において、円上に微小な長さ dx をとると、$\sin\theta$ は常に 1 であり、さらに円上のどこに dx をとっても dH は同じ値であるから（半径 R が同じなので)、

この式を、dxを見込む角$d\phi$を用いて$dx=Rd\phi$と表し、これを代入して積分すると

$$H=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi}\frac{IRd\phi}{R^2}=\frac{IR2\pi}{4\pi R^2}=\frac{I}{2R}$$

が得られる。この式から磁場Hの単位が［A/m］であることがわかる。

(4) このコイルの各辺には、フレミングの左手の法則

$$\boldsymbol{F}=l\,\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$$

で表される力が働くが、そのうち、横方向の辺（長さがbの辺）に働く力は回転力にはならないことが図からわかる。長さaの辺（縦の辺）に働く力は

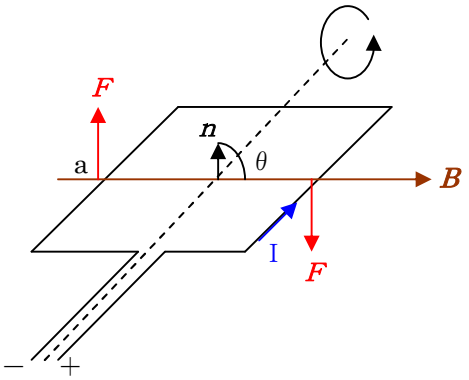
$$\boldsymbol{F}=a\,\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$$

となり、この辺に関しては常に$\boldsymbol{I}\perp\boldsymbol{B}$であるので力の大きさは

$$F=a\,I\,B$$

となる。この力によるコイルの回転力は

$$\boldsymbol{N}=2\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$



ここで、回転半径は$r=b/2$であり、長さaの辺は両側にあることを考慮した。この回転力の大きさはBとコイル面の法線$\boldsymbol{n}$とのなす角をθとして

$$N=2(b/2)\;a\,I\,B\sin\theta=a\,b\,I\,B\sin\theta$$

したがって回転力が最大となるのは$\theta=\pi/2$となるとき、すなわち、コイルの法線$\boldsymbol{n}$が鉛直方向、つまり、コイル面が水平になっているときである。このときのトルクは$N=a\,b\,I\,B$となる。

(5) 1［V］の電圧で加速した電子の速度vは

$$(1/2)\,m\,v^2=e\,V$$

より

$$v=\sqrt{\frac{2eV}{m}}=\sqrt{\frac{2\times1.602\times10^{-19}\times1}{9.109\times10^{-31}}}=0.593\times10^6\quad[\mathrm{m/s}]$$

進行方向垂直に1［T］の磁束密度をかけたとき電子が受けるローレンツ力は

$$\boldsymbol{f}=-e\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

であり、その大きさは

$$f=-e\,v\,B\sin(\pi/2)$$
$$=-1.602\times10^{-19}\times0.593\times10^6\times1=0.950\times10^{-13}\quad[\mathrm{N}]$$

この力の方向は$-z$方向（下向き）である。

(6) 長い直線電流が作る磁場は次の式で与えられるので、これに与えられた数値を代入して

$$H=\frac{I}{2\pi r}=\frac{1}{2\pi\times1}=0.159\quad[\mathrm{A/m}]$$

(7) (a) このコイルの中央の中心に発生している磁場の強さは、無限に長いソレノイドと同様であると考えてよいので

$H = NI = (1/0.0005) \times 1 = 2000$ [A/m]

(b) このコイルの自己インダクタンスは、両端の影響を無視できるとしているので、コイルの断面積を S として単位長さあたり、

$L = \mu N^2 S$

となるので、これにコイルの長さを掛けて

$L = \mu N^2 S = 1.257 \times 10^{-6} \times (1/0.0005)^2 \times \pi \times 0.1^2 \times 1$

$= 0.158$ [H]

(8) コイルの両端の誘導電圧を V、これにより流れる電流を $-I$ とすれば、この電力（消費電力）は

$$P = \frac{dW}{dt} = V(-I) = \left(-L\frac{dI}{dt}\right)(-I) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$$

したがって、コイルに蓄えられているエネルギー（仕事をする能力）は

$$W = \frac{1}{2}LI^2 \quad [\mathrm{J}]$$

(9) 自己インダクタンス L [H] のコイルに電流 I [A] が流れているとき、コイルが持つエネルギー $(1/2)LI^2$ を時間 t で微分すれば

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) = \frac{1}{2}L \cdot 2I\frac{dI}{dt} = \left(-L\frac{dI}{dt}\right)(-I) = -VI$$

すなわち、誘導起電力による消費電力になる。

第９章

(1) (a) 指数関数の微分すればもとの形になることに注意して、公式

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

を用いて $I = Ae^{-Bt}$ を t で微分すれば

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}Ae^{-Bt} = -ABe^{-Bt}$$

(b) 時間 $t = 0$ から t までの範囲で $I = Ae^{-Bt}$ を t で積分すれば

$$\int_0^t I dt = \int_0^t Ae^{-Bt} dt = \left[-\frac{A}{B}e^{-Bt}\right]_0^t = -\frac{A}{B}(e^{-Bt} - 1)$$

(2) RC 回路に電池をつないでから t 秒後に回路を流れている電流はテキスト(9.5)式より

$$I = \frac{V}{R}e^{-t/RC}$$

なので、抵抗に加わっている電圧 V_R は

$$V_R = RI = Ve^{-t/RC}$$

コンデンサーの電圧 V_C は

$$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t I dt$$

$$= \frac{1}{C}\frac{V}{R}\int_0^t e^{-t/RC} dt = \frac{1}{C}\frac{V}{R}(-RC)\left[e^{-t/RC}\right]_0^t dt$$

$$= V(1 - e^{-t/RC})$$

したがって

$$V_R + V_C = Ve^{-t/RC} + V(1 - e^{-t/RC}) = V$$

$$\therefore \quad RI + \frac{Q}{C} = V$$

(3) 上の解答の最後の式の両辺を t で微分すれば

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{dV}{dt} = 0 \qquad \therefore \quad R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

(4) RC回路の時定数 $\tau = RC$は回路を流れる電流の時間変化を表す式

$$I = \frac{V}{R}e^{-t/RC}$$

の中に現れる。この式の右辺の指数は無次元でなければならない。このことから t と RCは同じ次元であることがわかる。

(5) 100 kΩの抵抗と 0.1 μF のコンデンサーを直列につないだRC回路の時定数は

$$\tau = RC = 100 \times 10^3 \times 0.1 \times 10^{-6} = 0.01 \quad [\mathrm{s}]$$

(6) (a) コンデンサーがほとんど導通しているとみなせるので、回路を流れる電流は

$$I \cong \frac{V_{in}}{R} = \frac{V_0}{R}\sin\omega t$$

(b) 出力には、わずかではあるが、コンデンサーの両端に現れている電圧 $V_{out}=Q/C$ がこの回路の出力電圧となるので

$$V_{out} = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t I dt = \frac{V_0}{RC}\int_0^t \sin\omega t dt = -\frac{V_0}{\omega RC}\cos\omega t$$

この出力電圧は入力電圧を積分したもの(定数倍 $1/RC$)になっているので、この回路は積分回路と呼ばれる。

(7) (a) 抵抗がほとんど導通している（$R \cong 0$）とみなせるので、コンデンサーの両端の電圧は

$$V \cong V_{in} = V_0 \sin\omega t$$

したがって、回路を流れる電流は

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = C\frac{dV}{dt} = C\omega V_0 \cos\omega t$$

(b) この電流は抵抗にも流れているので、抵抗の両端にはわずかではあるが電圧が発生する。この電圧は

$$V_{out} = R\,I = R\,C\,\omega\,V_0 \cos\omega t$$

この出力電圧は入力電圧を微分したものの(定数($R\,C$)倍)になっているので、この回路は微分回路と呼ばれる。

(8) $R\,L\,C$回路を流れる電流が最大となるのは(9.15)で$L\,\omega = 1/C\,\omega$となるとき、すなわち、$\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ となる場合であり、このとき電流の最大値は

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

となる。このとき(9.16)より$\phi = 0$であるので、電流の時間的な遅れ（進み）（位相差という）はない。