理工系の物理学入門 付録

最終更新日 2013 年 12 月 26 日 (付録 D に音と光を追加，旧来の D，E は E，F に変更)

この付録は，本来ならば，教科書「理工系の物理学入門」の巻末に付けたかったものである。しかしながら，それでは教科書が分厚くなってしまう。そこで，切り離して，裳華房のホームページに置いてもらうことにした。教科書には必要最小限の数学的事項を必要箇所にちりばめたが，どうしても最低限の説明で終わってしまい，初学者にはわかりにくい面が残ったのではないかと危惧する。また，講義を担当する教員の立場からも，教えにくさの不満が残ったのではないだろうか。

そこで，ここではページ制限を気にすることなく，よりていねいで首尾一貫した説明を試みた。教科書と重複する箇所が多々あるが，読みやすさを優先させた。これらのことをご了承いただきたい。

この付録は，A，B，C，D，E，F の 6 章から成る。付録 A では，位置ベクトルを中心として，ベクトルの必要性とその基本的な演算についての標準的なことがらを解説した。ベクトル同士の重要な積である内積と外積については，まず教科書とは逆の定義，すなわち 2 つのベクトル間の角度を用いた定義をして，成分を用いた定義との同等性を示した。ここでは「そういう証明方法もあるのか」と思っていただければよい。教科書では混乱を避けるために，直交直線 (デカルト) 座標系のみの使用に限ったが，円筒極座標系や球面極座標系もよく使われる。それらについても基本的なことがらを解説した。

付録 B では微分と積分についてより詳しく数学的基礎を説明するとともに，基本的な微分方程式の解法を説明した。教科書でも強調しているように，大学で習う運動方程式は時間に関する 2 階の微分方程式に他ならず，それを解くことによって物体の運動が記述できる。また，熱現象をはじめ，いろいろなところで微分方程式が現れる。その解法では，複素数の複素表示を身につけるとその道筋が単純明快になる。さらに副産物として，三角関数の sin や cos の複素表示を用いると，微分や和の公式などが簡単に導かれる。「これぞ大学の数学」というオイラーの公式を，この際理解して活用できるようにしよう。

付録 C では，スカラー場，ベクトル場とその間の演算について説明している。特に電磁気学ではこれらの「場」が活躍する。電場や磁場などの「場の量」の間に成り立つ関係をまとめたものが，マクスウェル方程式である。

場の量は必然的に多変数関数である。すなわち，位置 x, y, z と時間 t の関数である。微分は偏微分となるが，その定義は見かけと異なり驚くほど簡単である。まずはナブラ演算子を理解しよう。ナブラ演算子をスカラー場に作用させれば grad となる。ベクトル場の場合には，ナブラ演算子との内積と外積とが考えられる。前者は div，後者は rot とよばれる。教科書では盛り込めなかったが，これら grad，div，rot の意味をしっかりつかめば，マクスウェル方程式の意味もより深く理解できるであろう。

マクスウェル方程式の積分形式と微分形式は，ガウスの定理，およびストークスの定理によって等価であることが知られている。さらに，特に電磁気学で現れる線積分，面積分や体積分についても解説し，ガウスの定理およびストークスの定理の直感的理解も図った。

マクスウェル方程式での素晴らしい予言は，光が電磁波であるというものだった。偏微分の演算に通じると，電場ベクトル (または磁場ベクトル) が波動方程式を満たすことが簡

単に導出できる。また，その速度が光速に一致するということから，誘電率と透磁率の積と光速との関係が求まる。そのため，教科書では触れることができなかった波動方程式についても解説をすることにした。もともと，波もニュートンの運動方程式に従う。すなわち，波に対するニュートンの運動方程式が波動方程式となる。それを具体的に導いて納得しよう。

付録 D には，音と光について基本的なことがらをまとめた。音と光は 5 感で受け取る情報の大部分を占め，日常的にも重要である。それにもかかわらず，教科書では十分な記述ができなかった。音については，ドップラー効果，音楽についての考察，光については，レンズの公式，プリズムによる分散，ヤングの光の干渉などについて解説した。その内容については，高校で物理を履修してこなかった学生も学習でき，高校で履修してきても復習に加えて少し進んだ話題を含めるよう配慮した。

付録 E では，教科書で省かざるを得なかった剛体の運動について述べた。大きさのある物体の運動を考えるとき，一般には変形による振動運動などの効果も考えなければならない。剛体は，硬くて変形しないという仮定なので，並進運動と回転のみを考えればよい。その運動は教科書の延長線上にあり，決して難しくはない。そこでは，慣性モーメントの定義と使い方が重要である。なぜ慣性モーメントと呼ばれるのかも含めて，基本をきちんと身につけよう。

付録 F では，教科書からばっさり削らざるを得なかった現代物理学についての基本的なことをまとめた。教科書では，19 世紀末までに確立された物理学で終わらざるを得なかったことが大変残念であった。また物理学入門なのに，現代物理学の部分が抜けているのは教科書にとって大いなる欠陥であるという指摘もあった。そこで，できるだけ簡潔に，しかし大事なことをわかりやすくという方針で，20 世紀以降の物理学をまとめてみた。

その基本は，量子力学と (特殊) 相対性理論である。量子力学は，ミクロの世界を理解する上で本質的に重要な分野である。ミクロの世界では，粒子は波のように振る舞い，波は粒子のように振る舞う。この，人知を超えた事実を素直に受け入れよう。(特殊) 相対性理論では時間さえも相対的であり，動いている時計は遅れてみえるという。このような常識破りの学問が現代物理学の神髄である。

この 2 つの柱の基本を理解した上で，原子核物理学，素粒子物理学，物性物理学，宇宙物理学を概観しよう。原子核物理学では，原子力エネルギーとは何か，なぜ放射性元素が存在するのかなどについて理解しよう。素粒子物理学では，その先の世界を垣間見，現在，その学問がどこへ向かおうとしているのかを見よう。物性物理学では，物質の多彩な構造や性質を物理学の視点から研究する。超伝導や超流動の機構，半導体の性質などについて基本的なことを見てみよう。宇宙物理学では，宇宙の構造や発展，その神秘について思いを馳せよう。

教科書同様に付録の中でも例題を解説し，問題には解答を付けた。学生諸氏，および講義担当の先生方にこの付録を活用していただき，教科書の内容をさらにより深く理解することに役立てていただければとてもうれしい。また，この付録をさらに有益なものにするためにフィードバックをいただければ大変幸いである。なお，付録 A は大成が，付録 B，C，D，E，F は渡邊が主に担当した。

目 次

付 録 A ベクトルとその演算 **1**
A.1 位置ベクトル 1
A.1.1 ベクトルの表記 1
A.1.2 ベクトルの大きさと向き 2
A.1.3 運動する質点の位置ベクトル 4
A.1.4 極座標系 4
A.2 ベクトルの演算 6
A.2.1 ベクトルのスカラー倍 6
A.2.2 ベクトルの加法と減法 6
A.2.3 スカラー積 8
A.2.4 ベクトル積 9
A.3 一般のベクトル 10

付 録 B 微分，積分，微分方程式 **13**
B.1 微分 13
B.2 積分 14
B.2.1 不定積分 14
B.2.2 定積分 15
B.3 複素表示 15
B.4 微分方程式の解法 17
B.4.1 1 階の微分方程式の解法 17
B.4.2 2 階の微分方程式の解法 18
B.4.3 変数分離の形の微分方程式の解 19

付 録 C 場の量とその演算 **21**
C.1 場とは？ 21
C.1.1 スカラー場 21
C.1.2 ベクトル場 21
C.2 ナブラ演算子 22
C.2.1 偏微分 22
C.2.2 ナブラ演算子 22
C.2.3 div の意味 24
C.2.4 * rot の意味 24
C.2.5 ベクトル解析の公式 26
C.3 * 波動方程式 26
C.3.1 1 次元の波動方程式 26
C.3.2 3 次元の波動方程式 29
C.4 マクスウェル方程式 30
C.4.1 マクスウェル方程式 (積分形) 30

C.4.2 マクスウェル方程式 (微分形) 31
C.5 線積分，面積分，体積分 31
C.5.1 極座標系での積分 32
C.5.2 線積分 32
C.5.3 面積分 33
C.5.4 体積分 35
C.5.5 ガウスの定理 36
C.5.6 ストークスの定理 37

付 録 D 音と光 39
D.1 音 39
D.1.1 音速 39
D.1.2 音の高さと音色 40
D.1.3 音の干渉 43
D.1.4 音の回折 44
D.1.5 ドップラー効果 44
D.1.6 衝撃波 46
D.1.7 超音波 47
D.2 光 47
D.2.1 幾何光学 47
D.2.2 プリズムと光の分散 54
D.2.3 光の干渉 56
D.2.4 光の回折 59

付 録 E 剛体の運動 65
E.1 物体の重心 65
E.2 剛体の運動 66
E.2.1 慣性モーメント 66
E.2.2 回転運動の運動エネルギー 68
E.2.3 慣性モーメントの計算 68
E.2.4 物理振り子 71
E.2.5 剛体の平面運動 73

付 録 F 現代物理学 77
F.1 量子力学 77
F.1.1 波の粒子性 77
F.1.2 粒子の波動性 79
F.1.3 シュレデインガー方程式 81
F.1.4 不確定性原理 84
F.2 相対性理論 85
F.2.1 特殊相対性理論の基本原理 85
F.2.2 ローレンツ変換 85
F.2.3 ローレンツ収縮，時間の遅れ 88
F.2.4 4 次元の世界とミンコフスキー座標 89
F.2.5 *一般相対性理論 92
F.3 原子核物理学 93

F.3.1 原子の構造 93
F.3.2 原子核の構造 94
F.3.3 原子核の安定性と放射性元素 95
F.3.4 原子力エネルギーと放射線 97
F.4 素粒子物理学 98
F.4.1 素粒子の大別 98
F.4.2 反粒子と CPT 定理 100
F.4.3 素粒子の分類 100
F.4.4 加速器の発展 102
F.4.5 素粒子理論の現状 104
F.5 物性物理学 105
F.5.1 物質の構造と化学的性質 105
F.5.2 電気的性質 107
F.5.3 磁性 110
F.5.4 新しい展開 110
F.6 宇宙物理学 112
F.6.1 ビッグバン宇宙 112
F.6.2 ダークマターと宇宙の構造 114
F.6.3 宇宙の加速膨張とダークエネルギー 114

付 録A　ベクトルとその演算

物理学では多くのベクトル量が現れる。この章では，基本的なベクトル演算についてまとめよう。ベクトルによる表現を使うと，数式が簡潔になるばかりでなく図解しやすいので見通しがよい。まずは，3 次元空間での物体の位置をどう表すかについて考えよう。その上で，基本的なベクトル演算について習熟しよう。

A.1　位置ベクトル

一般に質点は，3 次元空間の中で運動する。それで，質点の位置をベクトルで表すと便利である。

3 次元空間の中で静止している，１つの質点を考えよう。その質点が空間に占める位置を正確に表すには，どうすればよいだろうか。日常生活で，もののありかを相手に伝えることを考えよう。その場合，必ず，何かまず目印になるものを指定し，それとの相対的な位置関係でもののありかを表現するだろう。

質点の位置も，他のものや特定の目印との相互関係で表すことしかできない。そこであらかじめ基準となる一点 O を，空間のどこかに指定しておくことにする。その点 O との関係で質点の位置 P を記述しよう。この基準点 O を**原点** (origin) とよぶ。原点はどこに定めようとも自由であるが，いったん定めたら，できる限り同じ原点で議論を進める。また問題によっては，原点を上手に選ぶことによって計算がより簡単になることがある。

A.1.1　ベクトルの表記

直感的で最も手取り早い方法は，原点 O を始点とし点 P を終点とする矢印記号 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を描くことである (図 A.1)。矢印の長さは，OP 間の距離を表している。更に矢印記号は，質点の位置が O から見てどの向きにあるかを表している。質点が別の位置 Q にあれば，長さや向きの異なる別の矢印記号 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が対応する。すなわち，矢印記号は空間の各点と一対一に対応する。このように，矢印記号 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって表される量を**位置ベクトル** (position vector) という。

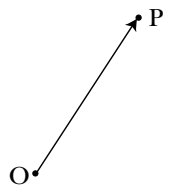

図 A.1: 位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$。

特に断らない限り，原点 O はいつも同一の点であると約束しておけば，いちいち記号 O を書く必要はない。そこで以後，位置 P にある質点の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を太文字記号 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ で

表すことにしよう。$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ は，質点の位置を象徴的に表す記号に過ぎない。そこでまず，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ を数量的に表現することを考えよう。O を原点とする直交直線 (デカルト) 座標系 O-xyz(図 A.2) を導入すると，質点の位置 P の座標 $(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}})$ が一意的に定まる。ここで，x_{P} は点 P から x 軸へ垂線を下したとき，x 軸と垂線との交点と原点との間の距離である。ただし，その交点が O から見て $-x$ 方向にあれば負符号を付ける。y_{P}，z_{P} も同様である。

座標が一意的に定まることから，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と質点の位置 P の座標 $(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}})$ を同一視できる。このことを次のように表そう。

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = (x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}}) \tag{A.1}$$

こうして，記号 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ で象徴される位置ベクトルが 3 つの実数の組で表された。$x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}}$ を，それぞれ位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ の x, y, z **成分** (component) とよぶ。位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ が (A.1) のように表されているとき，それは定められた直交直線座標系 O-xyz に基づいていることに注意しなければならない。

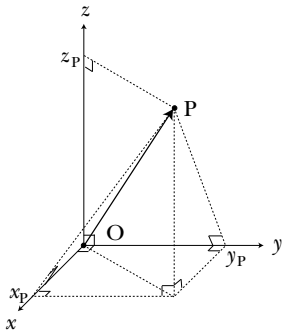

図 A.2: 直交直線座標系 O-xyz と点 P。

A.1.2　ベクトルの大きさと向き

次に，矢印の長さ，すなわち位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ の大きさを記号 $|\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}|$ で表そう。$|\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}|$ を簡潔に細文字で r_{P} と書こう。これは明らかに，OP 間の距離に等しい。したがって，ピタゴラスの定理により，r_{P} は $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ の成分を使って次のように表される。

$$r_{\mathrm{P}} = \sqrt{x_{\mathrm{P}}^2 + y_{\mathrm{P}}^2 + z_{\mathrm{P}}^2} \tag{A.2}$$

問題 A.1 3 次元でのピタゴラスの定理の導出

3 次元でのピタゴラスの定理，(A.2) を導きなさい。⋈

さらに矢印の向き，すなわち，位置ベクトルの向きを記号 $\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}}$ で表そう[1]。いま，矢印の線分と x, y, z 軸の成す角を，それぞれ $\theta_{\mathrm{P}}, \phi_{\mathrm{P}}, \psi_{\mathrm{P}}$ とする (図 A.3)。3 つの角度 $\theta_{\mathrm{P}}, \phi_{\mathrm{P}}, \psi_{\mathrm{P}}$ が与えられれば，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ の向き $\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}}$ は完全に定まる。これらの角度は $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ の x, y, z 成分と次の関係にある。

$$\cos\theta_{\mathrm{P}} = \frac{x_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{P}}},\ \cos\phi_{\mathrm{P}} = \frac{y_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{P}}},\ \cos\psi_{\mathrm{P}} = \frac{z_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{P}}} \tag{A.3}$$

これらを，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ の**方向余弦** (directional cosine) という。

[1] $\hat{a}$ において，a の上の記号はハット (hat，帽子) と読み，$\hat{a}$ は「エイハット」と読む。

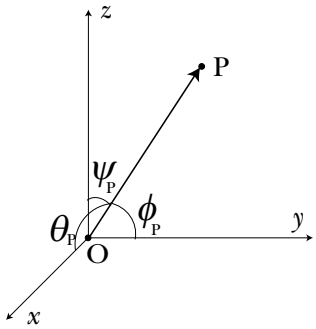

図 A.3: 角度 θ_P, ϕ_P, ψ_P の定義。

3 つの角度 θ_P, ϕ_P, ψ_P の代わりに，この 3 つの方向余弦が与えられても $\boldsymbol{r}_P$ の向き $\hat{\boldsymbol{r}}_P$ は完全に定まる。したがって，$\hat{\boldsymbol{r}}_P$ を 3 つの方向余弦を用いて次のように表す。

$$\hat{\boldsymbol{r}}_P = (\cos\theta_P, \cos\phi_P, \cos\psi_P) \tag{A.4}$$

$\hat{\boldsymbol{r}}_P$ は，方向余弦をそれぞれ x, y, z 成分とする 1 つの位置ベクトルである。(A.3) と (A.4) を使うと，

$$\cos^2\theta_P + \cos^2\phi_P + \cos^2\psi_P = 1 \tag{A.5}$$

であるから，$\hat{\boldsymbol{r}}_P$ は，単位球面 (原点を中心とする半径 1 の球面) と位置ベクトル $\boldsymbol{r}_P$ との交点を与える (図 A.4)。$\hat{\boldsymbol{r}}_P$ の大きさ $|\hat{\boldsymbol{r}}_P|$ は当然 1 である。なお，大きさ 1 のベクトルを**単位ベクトル** (unit vector) という。

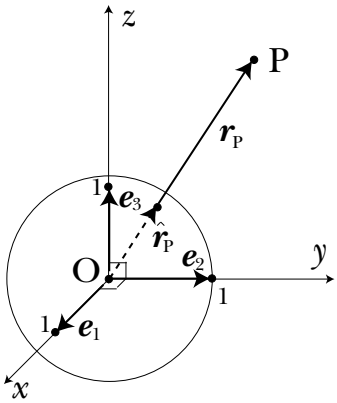

図 A.4: 単位球面と位置ベクトル $\boldsymbol{r}_P$，および規底ベクトル。

問題 A.2 ベクトルと単位ベクトル
$\boldsymbol{r}_P = r_P\hat{\boldsymbol{r}}_P$ を示しなさい。⋈

直交直線座標系 O$-xyz$ の各座標軸における正の部分と，単位球面とが交わる点を表す位置ベクトルを，それぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とする (図 A.4)。これを**基底ベクトル** (base vector)，または**単位直交ベクトル** (orthogonal unit vector) という。基底ベクトルを直交直線座標系 O$-xyz$ についての成分により，次のように表される

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0),\ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0),\ \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1) \tag{A.6}$$

。直交直線座標系は，質点とは関係なく，任意に選ぶことができる。したがって，質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ の成分や方向余弦の値は定めた直交直線座標系ごとに異なる。しかし，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ の大きさ r_{P} は，原点が同じである限り，どのような直交直線座標系を選んでも同じ値になる (問題 A.3)。

問題 A.3 位置ベクトルの座標系依存性

位置ベクトルについて次のことを示しなさい。

(1) 位置ベクトルは，原点のとり方を変えると異なるものになる。

(2) 原点が同じであっても，直交直線座標系のとり方を変えると位置ベクトルの成分は異なるものになるが，大きさは変わらない。⋈

A.1.3　運動する質点の位置ベクトル

運動する質点は，その位置が時々刻々に変化する。したがって，運動する質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は時間 t の関数である。それを $\boldsymbol{r}(t)$ と書こう。位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ の先端が，時刻 t の進行とともに空間に描く軌跡を質点の**軌道** (trajectory) という (図 A.5)。質点が軌道を描いて運動するにつれて，位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ の長さ $|\boldsymbol{r}(t)| = r(t)$ やその向き $\hat{\boldsymbol{r}}(t)$ は一般に連続的な変化をする。そして位置ベクトルの成分，つまり質点の座標 (x, y, z) も，もちろん時間の関数である。よって，以下のように表せる。

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{A.7}$$

すなわち，質点の軌道は，次式のように時間 t を媒介変数として表される。

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{A.8}$$

時間を表すパラメーター t は単調かつ一様に増加する実数値なので，質点の軌道は一般に向きを持つ曲線になる。

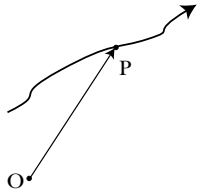

図 A.5: 質点の軌道。

上で見てきたように，３次元空間を運動する質点の位置ベクトルは，直交直線座標系を導入することにより 3 つの成分で表される。質点が 2 次元空間 (例えば平面内) を運動することがわかっている場合には，その 2 次元空間内に 2 次元直交直線座標系 O$-xy$ を導入すれば，質点の位置ベクトルは 2 成分で表される。さらに，質点が 1 次元空間 (例えば x 軸上) を運動することがわかっている場合には，原点をその線上に定めることにより，質点の位置は 1 成分 $(x(t))$ で表される。

A.1.4　極座標系

場合によっては，極座標系を用いると便利な場合がある。ここでは極座標系について解説しておこう。

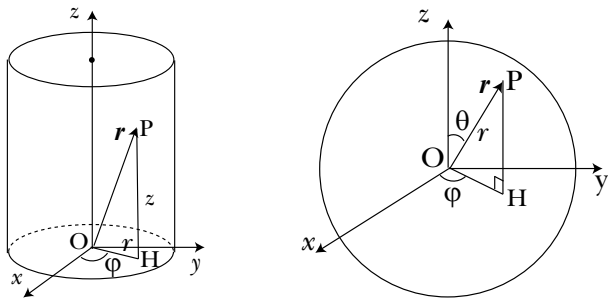

図 A.6: 円筒極座標系 (左) と球面極座標 (右) での位置ベクトル (r)。

円筒極座標系：図 A.6 左のように，点 P を (r, φ, z) の 3 つの変数で表す座標系である。

r, φ については，点 P から xy 平面に垂線を下ろした点を H とすると，r は OH の長さ，φ は OH が x 軸と成す角度である。デカルト座標 (x, y, z) との関係は，

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \tag{A.9}$$

で与えられる。逆に解くと

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \tag{A.10}$$

となる。

平面の問題の場合は，z 軸を省いて ($z=0$ とおいて) 平面極座標系 (r, φ) となる。

球面極座標系：図 A.6 右のように，点 P を (r, θ, φ) の 3 つの変数で表す座標系である。r は原点から P までの距離，θ は OP と z 軸との角度，φ は P 点から xy 平面に垂線を下ろした点を H としたときの OH と x 軸との成す角度である。デカルト座標 (x, y, z) との関係は，

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{A.11}$$

で与えられる。逆に解くと

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{aligned} \tag{A.12}$$

となる。

A.2　ベクトルの演算

実数などの普通の数を**スカラー量** (scalar quantity) という。スカラー量は大きさだけをもつ量である。それに対して，大きさだけでなく向きももつ量を**ベクトル量**という。スカラーに四則演算があるように，ベクトルにも加法，減法そして乗法の演算がある。2 つのベクトルの乗法には，スカラー積とベクトル積とがある。しかしながら，ベクトル同士の除法は，一般には定義されていない。以下では，位置ベクトルを具体例にして議論を進めるが，種々の関係は任意のベクトルについて成立する。

A.2.1　ベクトルのスカラー倍

位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を考えよう。ここでは，時間変数 t をあらわには書かないことにする。いま α を 0 でない実数として， $\boldsymbol{r}$ の各成分を α 倍にしたものを成分とする位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$ とする。

$$\boldsymbol{r}' = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \tag{A.13}$$

もし $\alpha > 0$ ならば，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を示す矢印は同じ向きである。また $\alpha < 0$ ならば，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を示す矢印は正反対を向く (図 A.7)。そして $\boldsymbol{r}'$ の大きさ $|\boldsymbol{r}'|$ は，(A.2) から $|\boldsymbol{r}'| = |\alpha| r$ で与えられる。そこで，これらをまとめて次のように表す。

$$\boldsymbol{r}' = \alpha \boldsymbol{r} \tag{A.14}$$

$\boldsymbol{r}'$ を $\boldsymbol{r}$ の α 倍という。(A.14) を (A.7) 及び (A.13) と見比べると，形式的に

$$\alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \tag{A.15}$$

と書いてよいことがわかる。特別な場合として $\alpha = -1$ とおくと $\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{r}$ となり，$\boldsymbol{r}'$ は大きさが $\boldsymbol{r}$ と同じで向きが正反対である。

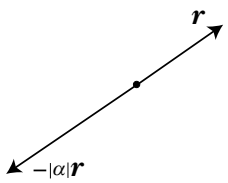

図 A.7: $\boldsymbol{r}$ と $-|\alpha|\boldsymbol{r}$。

A.2.2　ベクトルの加法と減法

2 つの位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = (x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}})$，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = (x_{\mathrm{Q}}, y_{\mathrm{Q}}, z_{\mathrm{Q}})$ を考えよう。このとき，$x_{\mathrm{P}} + x_{\mathrm{Q}}$，$y_{\mathrm{P}} + y_{\mathrm{Q}}$，$z_{\mathrm{P}} + z_{\mathrm{Q}}$ を成分とする位置ベクトルは図 A.8 に示すように，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ に対応する矢印がつくる平行四辺形の対角線に重なる。この位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ で表す。

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = (x_{\mathrm{P}} + x_{\mathrm{Q}}, y_{\mathrm{P}} + y_{\mathrm{Q}}, z_{\mathrm{P}} + z_{\mathrm{Q}}) \tag{A.16}$$

すなわち位置ベクトルの加法は，幾何学的には平行四辺形によって，代数的には成分同士の足し算によって定義する。

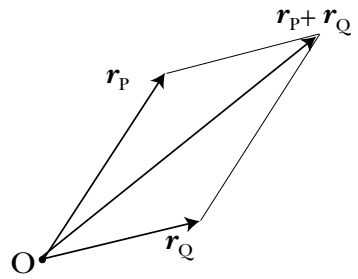

図 A.8: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}+\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$。

ベクトルのスカラー倍とベクトルの加法の定義を利用すると，ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ は，単位直交ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を用いて次のように表される。

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = x_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_1 + y_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_2 + z_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_3 \tag{A.17}$$

同様にして，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = x_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{e}_1 + y_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{e}_2 + z_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{e}_3$ と表せば，

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = (x_{\mathrm{P}} + x_{\mathrm{Q}})\boldsymbol{e}_1 + (y_{\mathrm{P}} + y_{\mathrm{Q}})\boldsymbol{e}_2 + (z_{\mathrm{P}} + z_{\mathrm{Q}})\boldsymbol{e}_3 \tag{A.18}$$

となることが理解できるであろう。この定義からすぐにわかるように，ベクトルの足し算は，以下のようにその順序を交換しても同じである。

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \tag{A.19}$$

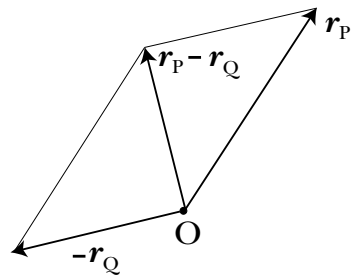

図 A.9: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$。

位置ベクトルの減法は加法の特別な場合である。いま，(A.19) で $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ の代わりに $\boldsymbol{r}' = (-1)\times\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ を選ぶと，

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + (-\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}) = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} \tag{A.20}$$

となる。このベクトルは，幾何学的に図 A.9 のように表される。また，成分で表せば，

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = (x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{Q}}, y_{\mathrm{P}} - y_{\mathrm{Q}}, z_{\mathrm{P}} - z_{\mathrm{Q}}) \tag{A.21}$$

となる。更に，(A.20) で 特に $\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と選ぶと，

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = (0, 0, 0) \tag{A.22}$$

となる。これを**ゼロベクトル** (null vector) といい，$\mathbf{0}$ または単に 0 で表す。ゼロベクトルの大きさは当然ゼロであるが，その向きは指定できない。

問題 A.4 ベクトルの性質
次の関係を示しなさい。

(1) α と β をスカラー，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ を２つの位置ベクトルとするとき，次の分配法則が成立することを示しなさい。

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = \alpha\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + \beta\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}},\ \alpha(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}+\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}) = \alpha\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} + \alpha\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} \tag{A.23}$$

(2) $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = (x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}})$ のとき，(A.17) が成り立つことを示しなさい。

(3) ２つの位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ の差 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ で与えられる位置ベクトルは，原点のとり方を変えたときに，始点が変わるだけでその大きさと向きは変らないことを示しなさい。⋈

A.2.3 スカラー積

２つの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$，それらの間の角度を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする。この２つのベクトルからつくられるスカラー量 $|\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}||\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}|\cos\theta$ を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ の**スカラー積** (scalar product)，または**内積** (inner product) といい $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ で表す。これは，図 A.10 を見てわかるように，ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ の $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ 方向への射影成分 $r_{\mathrm{Q}}\cos\theta$ と r_{P} との積である。

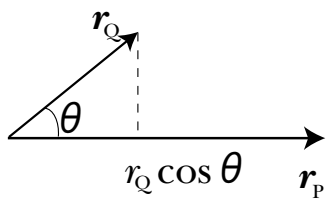

図 A.10: スカラー積 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$。

スカラー積は，その定義から積の順序を交換してもよい。

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \tag{A.24}$$

スカラー積は，その定義からすぐわかるように，互いに直交するベクトルではゼロになる。また任意のスカラー α に対して，次の関係が成立することがすぐにわかる。

$$\alpha(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}) = (\alpha\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}) \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \cdot (\alpha\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}) \tag{A.25}$$

例題 A.1 スカラー積の成分表示
$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ の成分をそれぞれ $(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}})$，$(x_{\mathrm{Q}}, y_{\mathrm{Q}}, z_{\mathrm{Q}})$ とする。このとき $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ のスカラー積が，これらの成分によって次のように表されることを示しなさい。

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = r_{\mathrm{P}} r_{\mathrm{Q}} \cos\theta = x_{\mathrm{P}} x_{\mathrm{Q}} + y_{\mathrm{P}} y_{\mathrm{Q}} + z_{\mathrm{P}} z_{\mathrm{Q}} \tag{A.26}$$

[解] 余弦定理により，

$$|(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}})|^2 = r_{\mathrm{P}}^2 + r_{\mathrm{Q}}^2 - 2r_{\mathrm{P}} r_{\mathrm{Q}} \cos\theta \tag{A.27}$$

が得られる。一方，左辺は各成分の 2 乗の和となり，

$$(x_{\mathrm{P}}-x_{\mathrm{Q}})^2+(y_{\mathrm{P}}-y_{\mathrm{Q}})^2+(z_{\mathrm{P}}-z_{\mathrm{Q}})^2 = x_{\mathrm{P}}^2+y_{\mathrm{P}}^2+z_{\mathrm{P}}^2+x_{\mathrm{Q}}^2+y_{\mathrm{Q}}^2+z_{\mathrm{Q}}^2-2(x_{\mathrm{P}}x_{\mathrm{Q}}+y_{\mathrm{P}}y_{\mathrm{Q}}+z_{\mathrm{P}}z_{\mathrm{Q}}) \tag{A.28}$$

である。(A.27) と (A.28) は等しいから，(A.26) を得る。◇

単位ベクトルが，次の性質を持つことは定義より明らかであろう。

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{A.29}$$

ただし，δ_{ij} はクロネッカー・デルタとよばれ，次のように定義される。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{A.30}$$

例題 A.2 単位ベクトルと内積
単位ベクトルの性質を用いて (A.26) を示しなさい。

[解] $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = (x_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_1 + y_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_2 + z_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_3)$ などとおき，(A.30) より

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = (x_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_1 + y_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_2 + z_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_3)\cdot(x_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{e}_1 + y_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{e}_2 + z_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{e}_3) = x_{\mathrm{P}}x_{\mathrm{Q}} + y_{\mathrm{P}}y_{\mathrm{Q}} + z_{\mathrm{P}}z_{\mathrm{Q}} \tag{A.31}$$

となる。よって示された。◇

$\boldsymbol{r}^2 \equiv \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$ と書くとき，定義から次の関係が成り立つ。

$$\sqrt{\boldsymbol{r}^2} = |\boldsymbol{r}| = r \tag{A.32}$$

問題 A.5 ベクトルの内積
$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = r_{\mathrm{P}}r_{\mathrm{Q}}$，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = -r_{\mathrm{P}}r_{\mathrm{Q}}$ となるのは，それぞれどういう場合か。⋈

A.2.4　ベクトル積

２つの位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ とから，もう 1 つの位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}$ を次のようにつくる。

(1) $\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}$ の大きさ: $|\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}| = r_{\mathrm{P}}r_{\mathrm{Q}}\sin\theta$。
(2) $\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}$ の向き: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ から $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ への小さい角度の方向に回したときの，右ネジの進む向き。

ここで θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ は，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ とが成す角度である (図 A.11)。$\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}$ は $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ との**ベクトル積** (vector product)，または**外積** (outer product) といい $\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ と書く。
ベクトル積は，その定義からすぐにわかるように，積の順序を交換すると符号が変わる。

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = -\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \tag{A.33}$$

また定義からわかるように，同じベクトルのベクトル積はゼロである。

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = 0 \tag{A.34}$$

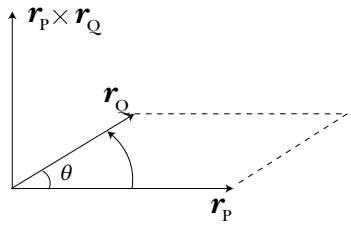

図 A.11: ベクトル積 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$。

さらに，次の分配法則が成立する。任意のスカラー α に対して，

$$\alpha(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}) = (\alpha\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}) \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times (\alpha\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}) \tag{A.35}$$

が成り立つ。また，

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times (\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{R}}) = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{R}} \tag{A.36}$$

も成り立つ。特に単位直交ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の間には，次の関係がある。

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \tag{A.37}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0 \tag{A.38}$$

例題 A.3 ベクトル積の成分
2 つのベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = (x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}})$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = (x_{\mathrm{Q}}, y_{\mathrm{Q}}, z_{\mathrm{Q}})$ のベクトル積 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ が，各成分によって，次のように表されることを示しなさい。

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = (y_{\mathrm{P}}z_{\mathrm{Q}} - z_{\mathrm{P}}y_{\mathrm{Q}}, z_{\mathrm{P}}x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{P}}z_{\mathrm{Q}}, x_{\mathrm{P}}y_{\mathrm{Q}} - y_{\mathrm{P}}x_{\mathrm{Q}}) \tag{A.39}$$

[解] (A.17)，(A.37)，(A.38) を用いると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} &= (x_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_1 + y_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_2 + z_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_3) \times (x_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{e}_1 + y_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{e}_2 + z_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{e}_3) \\
&= (y_{\mathrm{P}}z_{\mathrm{Q}} - z_{\mathrm{P}}y_{\mathrm{Q}})\boldsymbol{e}_1 + (z_{\mathrm{P}}x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{P}}z_{\mathrm{Q}})\boldsymbol{e}_2 + (x_{\mathrm{P}}y_{\mathrm{Q}} - y_{\mathrm{P}}x_{\mathrm{Q}})\boldsymbol{e}_3 \\
&\equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_{\mathrm{P}} & y_{\mathrm{P}} & z_{\mathrm{P}} \\ x_{\mathrm{Q}} & y_{\mathrm{Q}} & z_{\mathrm{Q}} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

となる。したがって (A.39) を得る。
　最後の式は行列式によるベクトル積の表示である。◇

A.3　一般のベクトル

1 つの質点の位置を表す位置ベクトルは，(矢印の始点となる) 原点のとり方を変更すると，明らかに向きや大きさの異なった位置ベクトルになる。しかし，2 つの (互いに異なる) 位置ベクトル r_{P}，r_{Q} の差，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ について考えてみよう。この場合は原点のとり方を変えても，矢印の向きと大きさは以前と同じままになっている (問題 A.3 および図 A.9)。ま

た，もし矢印の位置がどこにあるかを問わずに，その向きと大きさだけが重要な場合には両者を同一視してよい。いいかえれば，この場合，**1 つのベクトルを平行移動したものは，すべて同等で互いに区別する必要がない。**物理学に現れるベクトルのほとんどのものは，このように原点のとり方によらないベクトルである。これを**自由ベクトル** (unconstrained vector) とよぶ。これに対して，位置ベクトルなどは**束縛ベクトル** (constrained vector) とよぶ。

いま，そのような自由ベクトルの 1 つを $\boldsymbol{A}$ としよう。1 つの直交直線座標系 O$-xyz$ を導入し，$\boldsymbol{A}$ の x, y, z 軸への射影成分をそれぞれ A_x, A_y, A_z とする。位置ベクトルとその成分の関係と同じように $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と表す。いままで位置ベクトルについての論理や得られた結果は，任意のベクトル についても成立する。例えば，$\boldsymbol{A}$ の大きさ $|\boldsymbol{A}|$ は

$$A \equiv |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{A.41}$$

である。また，2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$，$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ のスカラー積は，その間の成す角度を θ とすると，

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos\theta \tag{A.42}$$

となる。そしてベクトル積は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &\equiv (A_y B_z - A_z B_y,\ A_z B_x - A_x B_z,\ A_x B_y - A_y B_x) \\ |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| &= AB \sin\theta \end{aligned} \tag{A.43}$$

が得られる。

問題 A.6 ベクトル演算

任意の 3 つのベクトル $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ について，次の関係が成り立つことを示しなさい。

(1) $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

(2) $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$

(3) 3 つのベクトル $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ を稜とする平行 6 面体の体積は，$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ で与えられる。⋈

付 録B　微分，積分，微分方程式

まず，微分についてきちんと理解しよう。微分の逆が積分である。定積分が関数を表す曲線と横軸との間の面積であり，その面積は細かく区分けした短冊を足し合わせたものであることなどを理解しよう。さらに複素表示を習得して，基本的な微分方程式の解法を学ぼう。またその副産物として，三角関数の複素表示から，その微分や和の公式などを導こう。

B.1　微分

x の関数 $y = f(x)$ を考えよう。関数の定義により，ある点 x_0 での関数の値は $y_0 = f(x_0)$ である。その点から Δx だけ離れた点 $x_1 = x_0 + \Delta x$ での関数の値は，$y_1 = f(x_0 + \Delta x)$ となる。$\Delta y \equiv y_1 - y_0$ として次の比を考えよう。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{B.1}$$

この式で Δx が 0 の極限をとろう。すると以下のようになる[1]。

$$f'(x_0) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \tag{B.2}$$

ここで $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ は，関数 $f(x)$ における，点 x_0 での x による微分である。$f'(x_0)$ は，図 B.1 のように点 x_0 での関数 $f(x)$ の傾きである。

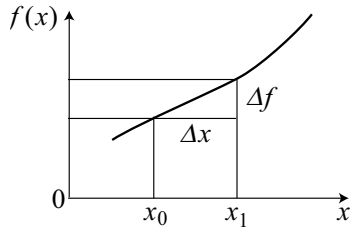

図 B.1: $f(x)$ の微分。

x_0 は任意であるので改めて x_0 を x とおくと，

$$f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} \tag{B.3}$$

が得られる。$f'(x)$ は $f(x)$ の x での傾きを表し，$f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数** (derivative) とよぶ。このような操作をすることを「$f(x)$ **を** x **で微分する**」という。

[1] ここでは，極限の値がユニークな値に収束するときを考えている。極限が 1 つだけ存在するとき，この関数は，点 x_0 で一階微分可能であるという。連続な関数であっても，ある点で傾きが不連続に変わるような場合は，その点では微分可能ではない。

さらに $f'(x)$ を x で微分したものを $f''(x)$，または $f^{(2)}(x)$ と書き，$f^{(2)}(x)$ を $f(x)$ の x による 2 階微分とよぶ[2]。

$$f''(x) \equiv f^{(2)}(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) \equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \tag{B.4}$$

一般に

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}\right) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n} \tag{B.5}$$

を，$f(x)$ の x による n 階微分とよぶ。

力学では，位置を時間 t の関数として考えるので，微分も t での微分となる。その場合，$\dot{f}(t)$ などのように点 (ドット) を上に付けて，x などでの微分と区別する。位置の 1 階微分が速度，2 階微分が加速度である。通常，力学では，t による 3 階以上の微分は考えなくてよい。なぜなら，物体にはたらく力がわかると加速度がわかり，運動方程式を解くことによって速度や位置が求まるからである。物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ が与えられたとき，物体の時刻 t での速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$，加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ は，単に各成分を微分して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &\equiv \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ \boldsymbol{a}(t) &\equiv \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \end{aligned} \tag{B.6}$$

で与えられる。

ある関数が与えられたとき，その微分は定義に基づいて計算できる (2.1 節の数学的事項)。主な関数の微分 (導関数) を，教科書の見返し表 6 にリストした。

B.2　積分

微分の逆が積分である。その意味を理解し，積分を自由自在に使えるようにしよう。

B.2.1　不定積分

導関数が $g(x)$ に等しい関数を，$g(x)$ の**不定積分 (原始関数)** とよぶ。$g(x)$ の不定積分は無数にある。その 1 つを $G(x)$ とすると，定義から次式が成り立つ。

$$\frac{dG(x)}{dx} = g(x) \tag{B.7}$$

$G(x)$ に定数 C を加えても (B.7) は変わらない。そのため $g(x)$ の不定積分は次のように書ける。

$$\int g(x')dx' = G(x) + C \tag{B.8}$$

ここで，$\int$ は積分記号であり，(B.8) は,「$g(x)$ の不定積分は $G(x) + C$ に等しい」と読む。任意の定数 C は積分定数 (integration constant) とよばれる。また，積分変数 (この場合では x' を指す) は任意であり，変数 x と区別するため x' を用いている。

[2] (B.4) の 4 番目の式から，なぜ $f^{(2)}(x)$ が 2 階微分とよばれるかわかるであろう。

B.2.2　定積分

連続関数 $g(x)$ が与えられたとき，$y = g(x)$ の $x_\mathrm{A} \leq x \leq x_\mathrm{B}$ の区間と x 軸との間の部分 (図 B.2 左の斜線部分) の面積を求めよう。まず，区間 $[x_\mathrm{A}, x_\mathrm{B}]$ を細かく分ける (図 B.2 右)。簡単のため，この区間を n 等分して $\Delta x = \frac{x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}}{n}$ とし $x_i = x_\mathrm{A} + (i-1)\Delta x$ とすると，面積 A は短冊の面積 $g(x_i)\Delta x$ を足し合わせることにより得られる。

$$A \simeq \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x \tag{B.9}$$

十分 n が大きければ，この値は一定の値に近付き，それが斜線部分の面積である[3]。

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x \equiv \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} g(x')dx' \tag{B.10}$$

この。区域を微小部分に区分けして足し合わせる方法は，計算機により数値積分を行う場合の基本原理である。特に，解析的に積分計算ができないときに，この方法で積分値を求めることができる。

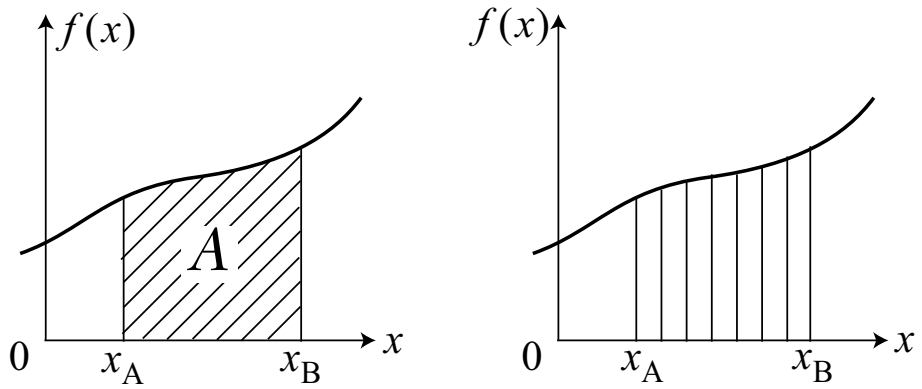

図 B.2: 斜線部の面積の求め方。

$g(x)$ の不定積分 $G(x)$ がわかっていれば (4.2 節の数学的事項参照)

$$A = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} g(x')dx' = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} \frac{dG(x')}{dx'}dx' = [G(x)]_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} = G(x_\mathrm{B}) - G(x_\mathrm{A}) \tag{B.11}$$

であることがわかる。

改めて $x = x_\mathrm{B}$ とおき，x_A を省略して $g(x) = f'(x)$ とおくと

$$f(x) = \int^{x} f'(x')dx' + C \tag{B.12}$$

と書くこともできる。C は積分定数である。この式は (B.8) に対応している。

B.3　複素表示

複素数の複素表示を定義しよう。複素数は微分方程式の解を求める際，および，その意味を考える際に本質的で重要な役割を演じる。また，複素表示を用いれば三角関数の公式が簡単に求まる。

[3] ここで，積分の記号として $\int$ を用いることになった理由がわかる。すなわち，積分とは，面積を細分化して足し合わせる (summation) 操作であり，その頭文字 s を上下に引き延ばしたのが積分記号である。

任意の複素数 z は，複素記号 $i \equiv \sqrt{-1}$ を用いて次のように書ける (オイラー (Euler) の式)[4]。

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (r \geq 0) \tag{B.13}$$

すなわち $\exp(i\theta) \equiv e^{i\theta}$ は，複素平面上，原点を中心とする単位円 (半径 1 の円) の円周上にあり ($|\exp(i\theta)| = 1$)，実軸上の $z = 1$ の点を反時計回りに角度 θ だけ回転させた点である[5](図 B.3)。また，(B.13) では，それぞれの関数をテイラー展開することによって，等式が成り立っていることを確かめることができる。

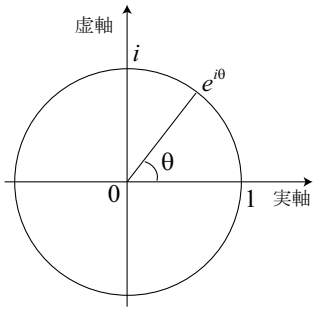

図 B.3: 複素平面と単位円。

例題 B.1 sin 関数，cos 関数の微分
複素表示を用いて，$\sin x$，$\cos x$ の微分が，次式で与えられることを示しなさい。

$$\begin{aligned} \frac{d\sin x}{dx} &= \cos x \\ \frac{d\cos x}{dx} &= -\sin x \end{aligned} \tag{B.14}$$

[解] 複素表示によると，(B.13) より

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\frac{de^{ix}}{dx} = ie^{ix} \tag{B.16}$$

などより，(B.15) を微分して (B.14) を得る。◇

ここで，三角関数のいろいろな公式を導こう。

問題 B.1 三角関数の和の公式
複素表示を用いて，$\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ が，

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{B.17}$$

で与えられることを示しなさい。⋈

[4]電気工学などでは，i は電流を表すのに使われるので，$j \equiv \sqrt{-1}$ と定義することも多い。
[5]$e = 2.718281828\cdots$ は自然定数の 1 つであり，自然対数の底 (てい) とよばれる。

(B.17) で β を $-\beta$ とおくと，差の公式

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{B.18}$$

が得られる。また，(B.17) で $\alpha=\beta\equiv\theta$ とおくと 2 倍の公式が出る。

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta = 2\cos^2\theta-1 = 1-2\sin^2\theta \tag{B.19}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{B.20}$$

さらに，(B.19) から次式が導かれる。

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} \\ \sin^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2} \end{aligned} \tag{B.21}$$

問題 B.2 三角関数の和，積の公式

三角関数の和について

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned} \tag{B.22}$$

が成り立つことを示しなさい。⋈

B.4 微分方程式の解法

運動方程式は，時間 t に対する 2 階の (線形) 微分方程式である。また，例えば熱伝導などいろいろな場面で微分方程式が出てくる。ここでは，1 階，2 階の線形[6]，および変数分離の形の微分方程式の解法を学ぼう。

B.4.1 1 階の微分方程式の解法

まず，1 階の微分方程式について考えよう。

$$a\frac{dx(t)}{dt}+bx(t)=c \tag{B.23}$$

ここで，a,b,c は定数である。$c=0$ の場合の方程式を斉次方程式という。非斉次方程式の解は，斉次方程式の解 (一般解) に特解 ($c\neq 0$ の場合の微分方程式を満たす特別な解) を加えて得られる。

まず，斉次方程式の解を考えよう。

$$a\frac{dx(t)}{dt}+bx(t)=0 \tag{B.24}$$

[6]各階の被微分関数 (ここでは $x(t)$) が 1 次の場合を線形の微分方程式という。すなわち，$x^2(t)$ など高次の項が含まれていない微分方程式のことである。

この解を，$x(t) = Ae^{\lambda t}$ とおいて (B.24) に代入しよう。ここで A は任意の定数，λ はこれから求めようとする定数である。すると，$\frac{d\exp(\lambda t)}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$ であるから $A \neq 0$ として，

$$a\lambda + b = 0 \text{ すなわち,} \lambda = -\frac{b}{a} \tag{B.25}$$

を得る。次に (B.23) の特解を求めよう。それは特別の解でよく，$x(t) = \frac{c}{b}$ は，これを満たしている。したがって，(B.23) の解は次式で与えられる。

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{b} \text{ ((B.23) の解)} \tag{B.26}$$

これに初期条件を当てはめれば A が求まる。例えば $x(0) = x_0$ であれば $x_0 = A + \frac{c}{b}$ より

$$A = x_0 - \frac{c}{b} \tag{B.27}$$

と求まる。

B.4.2　2 階の微分方程式の解法

次に，2 階の微分方程式について考えよう。

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = d \ \ (a \neq 0) \tag{B.28}$$

ここで，a, b, c, d は定数である。この解は，1 階の場合と同じく，斉次方程式の解に特解を加えたものとなる。

まず，$d = 0$ (斉次方程式) の場合を考える。1 階の微分方程式のときと同様に，

$$x(t) = A'e^{\lambda t} \tag{B.29}$$

を代入してみよう。すると $A' \neq 0$ として，

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{B.30}$$

が得られる。これは λ の 2 次式で，

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{B.31}$$

と求まる。この解は，

$$D = b^2 - 4ac \text{ (判別式)} \tag{B.32}$$

が正か負か 0 の 3 つの場合に分けられる。

$$D > 0 \ \ : \ \ \lambda_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \ \ x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \tag{B.33}$$

$$D < 0 \ \ : \ \ \lambda_\pm = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}, \ \ x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \tag{B.34}$$

$D = 0$ のときは，$\lambda_0 = -\frac{b}{2a}$(重根) となり，この場合は次式が解になる。

$$x(t) = (At + B)e^{\lambda_0 t} \tag{B.35}$$

ここで，A, B は任意の定数であり，初期条件によって決まる量である。

これに，(B.28) の特解 $x(t) = \frac{d}{c}$ を加えて (B.28) の解となる。まとめると (B.28) の解は次のようである。

$$D > 0 \quad : \quad x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} + \frac{d}{c}, \quad \lambda_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{B.36}$$

$$D = 0 \quad : \quad x(t) = (At + B)e^{\lambda_0 t} + \frac{d}{c}, \quad \lambda_0 = -\frac{b}{2a} \tag{B.37}$$

$$D < 0 \quad : \quad x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} + \frac{d}{c}, \quad \lambda_\pm = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} \tag{B.38}$$

$D < 0$ の場合で実数解がほしいときは，独立な関数として sin と cos を選び，その和をとればよい。すなわち，A, B を新たな積分定数として

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{|D|}}{2a}t + B\sin\frac{\sqrt{|D|}}{2a}t\right) + \frac{d}{c} \tag{B.39}$$

が一般解となる。ここで，$\frac{b}{2a} > 0$ の場合は振動が減衰していくので，減衰振動の解とよばれる。

単振動の解 特に単振動の式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \tag{B.40}$$

では $\lambda_\pm = \pm i\omega$ であり，

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{B.41}$$

が一般解となる。

B.4.3　変数分離の形の微分方程式の解

微分方程式が，次のように変数分離の形で与えられる場合がよくある。

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \tag{B.42}$$

この式は次のように変形できる。

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt \tag{B.43}$$

すると，両辺を積分することができて

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)dt + C \tag{B.44}$$

を得る。C は積分定数である。

例題 B.2 変数分離の形の微分方程式の解の例
次の微分方程式の解を求めなさい。

$$\frac{dx}{dt} = xt \tag{B.45}$$

[解] すぐに (B.44) の形に変形できて，

$$\int \frac{dx}{x} = \int t dt + C \tag{B.46}$$

となる。これは簡単に積分できて，

$$\ln |x| = \frac{t^2}{2} + C \tag{B.47}$$

を得る[7]。すなわち，

$$x(t) = C' \exp(\frac{t^2}{2}) \tag{B.48}$$

を得る。ただし，$C' = \exp C$ は積分定数である。◇

[7] ここで，$\ln X \equiv \log_e X$ で自然対数と呼ばれる。また $X \geq 0$ である。

付 録C　場の量とその演算

電磁気学や波動では「場」の概念が大事である。スカラー場，ベクトル場とその演算についてまとめておこう。演算の中でも，特に偏微分が重要である。場の量は必然的に多変数関数であり，その微分には偏微分が本質的に重要な役割を演ずる。微分が理解できていれば，偏微分の理解は驚くほど簡単である。ここでは偏微分についての基本的なことがらと，grad，div，rot などの演算の意味を理解し活用できるようにしよう。その上で，電磁気学を記述するマクスウェル方程式を理解しよう。

マクスウェル方程式のハイライトの１つは，その真空解から電磁波の存在が予言されたことである。これを理解するには波動方程式を理解する必要がある。そこで，波動方程式について解説することにした。まずは，ニュートンの運動方程式が波動方程式と等価であることを導き，その上でベクトル演算の公式を用いて電磁波の解を導こう。

マクスウェル方程式は積分形，または微分形で書ける。まず積分について，線積分，面積分，体積分の意味を理解しよう。その上で，ガウスの定理，ストークスの定理を使うと，積分形と微分形の同等性が導かれることを学ぼう。

C.1　場とは？

物理量が空間の各点で定義され座標の関数であるとき,「**場** (field)[1]がある」という。波動や電磁気学で学ぶのは，スカラー場とベクトル場である。それらは空間座標の関数である。さらに，それらが時間的に変化すれば時間の関数でもある。座標には，基本的には直交直線 (デカルト) 座標系 (Cartesian Coordinates)(x, y, z) を用いるが，ほかによく使われる座標系として，円筒極座標系，球面極座標系 (を用いた積分) についても説明する。

C.1.1　スカラー場

スカラー (scalar) 量とは，大きさだけをもつ量である。スカラー場とは空間の各点で大きさ (だけ) をもつ場をいう。例として気圧を考えよう。地上を平面とすれば，気圧は位置座標 (x, y)[m] の関数である。上空へ行くと気圧は下がるので，より一般的には (x, y, z)[m] の関数といえる。さらに，気圧は時々刻々と変化するので，時間 t[s] の関数でもある。気圧を p[Pa](pascal) という変数で表せば，空間座標と時間の関数であるので，$p(x, y, z, t)$[Pa] と表せる。例えば，スカラー場である気圧 p[Pa] が，位置座標 $\boldsymbol{r}$[m] と時間 t[s] の関数であることを，次のようにも表せる。

$$p(x, y, z, t) \equiv p(\boldsymbol{r}, t) \text{ [Pa]} \tag{C.1}$$

C.1.2　ベクトル場

ベクトル場とは，空間の各点で大きさと向きをもつ場をいう。例として風力を考えよう。風力は，空間の各点で向きと大きさをもつ。すなわち位置座標 $\boldsymbol{r}$[m] の関数である。風の

[1]物理学では,「場」という用語が一般的に使われるが，高校や工学では「界」が用いられることが多い。

向きも強さも時々刻々と変化するので，時間 t[s] の関数でもある。風力ベクトルを $\boldsymbol{w}$ と書くと

$$\boldsymbol{w}(x, y, z, t) \equiv \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}, t) \tag{C.2}$$

と書ける。

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は位置座標 $\boldsymbol{r}$[m] や時間 t[s] の関数であるので，本来は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ と書かれるべきである。省略して単に $\boldsymbol{A}$ と表記することも多い。スカラー場についても同様である。

C.2　ナブラ演算子

場は座標 x, y, z および時間 t の関数であり，場は必然的に多変数関数である。まず偏微分を定義しよう。

C.2.1　偏微分

偏微分 (parital derivative) は多変数関数に関する微分である。その定義は驚くほど簡単で，他の変数を定数に保ったまま，着目する変数で微分するだけである。多変数関数 $f(x, y, z, \cdots)$ の x に関する偏微分は，

$$\frac{\partial f(x, y, z, \cdots)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \cdots) - f(x, y, z, \cdots)}{\Delta x} \tag{C.3}$$

と定義される[2]。

例えば $f(x, y)$ が山の高度を表しているとすると，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ は点 (x, y) での x 方向の山の傾きを表す。

通常の微分と同様に，間に別の変数を介して偏微分ができることを次の例で見てみよう。

例題 C.1 偏微分の計算
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$ のとき，$\frac{\partial f}{\partial x}$ を求めなさい。

[解]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \times \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = -\frac{x}{r^3} \tag{C.4}$$

となる。◇

C.2.2　ナブラ演算子

3 次元空間で微分するときに現れるのが $\boldsymbol{\nabla}$(nabla: ナブラ[3]) であり，次のように定義される。

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{C.5}$$

$\boldsymbol{\nabla}$ は，3 成分をもつベクトル的演算子である。演算子とは関数に演算するものをいう。

[2]偏微分記号 ∂ は，英語では round d とよばれたり，parital derivative と読まれるようである。
[3]形が古代ヘブライの立て琴に似ていることからの命名。

grad

スカラー場 ϕ にナブラ演算子を作用させよう。

$$\boldsymbol{\nabla}\phi \equiv (\frac{\partial\phi}{\partial x},\ \frac{\partial\phi}{\partial y},\ \frac{\partial\phi}{\partial z}) \equiv \mathrm{grad}\,\phi \tag{C.6}$$

すなわち $\boldsymbol{\nabla}\phi$ はベクトル場となり，(x, y, z)[m] という点での ϕ の x, y, z 方向の傾き (gradient) を表す。

問題 C.1 grad の計算
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のとき，$\mathrm{grad}\frac{1}{r}$ を計算しなさい。⋈

2 つのナブラ演算子の内積も演算子となり，例えばスカラー場 ϕ について

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi \equiv \nabla^2\phi \equiv \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{C.7}$$

と定義される。

例題 C.2 偏微分の計算 (2)
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$ のとき，

$$\nabla^2\frac{1}{r} = 0 \tag{C.8}$$

を示しなさい。

[解] (C.4) をさらに x で微分して

$$-\frac{\partial\left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \tag{C.9}$$

となる。y，z の微分では，(C.9) で x の代わりに y，z を代入すればよい。したがって，

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + 3\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0 \tag{C.10}$$

となる。◇

発散と回転

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対しては，$\boldsymbol{\nabla}$ との内積と外積が考えられ，次のように定義される。

$$\text{内積}\quad :\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \equiv \mathrm{div}\boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{C.11}$$

$$\text{外積}\quad :\quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \equiv \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{C.12}$$

すなわち，内積はスカラー場となり，外積はベクトル場となる。これらがなぜ divergence や rotation とよばれるかを以下で考えよう。

C.2.3　div の意味

水の定常的な流れで div の意味を考えよう。まず，川を流れる水量について考える。川に沿っての距離を x で表そう。川のある位置 x[m] を流れる単位時間当りの水量を，$D(x)$[kg/s] とする。微小距離 Δx だけ離れた $x+\Delta x$[m] を流れる水量は，水の出入りがなければ同じである。川底に小さな泉がたくさんあり，水が湧き出していたり，もしくは，蒸発で水が失われているとしよう (図 C.1)。Δx[m] 区間で差し引き追加される水量は，単位時間当り $\rho(x)\Delta x$[kg/s] であるとしよう。水量の保存則より，

$$D(x+\Delta x) - D(x) = \rho(x)\Delta x \ \text{[kg/s]} \tag{C.13}$$

である。Δx を無限に小さくして，

$$\frac{dD(x)}{dx} = \rho(x) \ \text{[kg/(m·s)]} \tag{C.14}$$

が得られる。

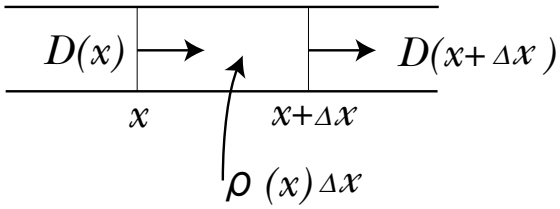

図 C.1: div の意味。

上の例では，x 断面での流量は y, z によらないと仮定していた。より現実的には，川底や岸との摩擦から，流量は y, z の関数となり，微小面積 $dydz$ を流れる流量を $D(x,y,z)dydz$[kg/s]，水量の増分も $\rho(x,y,z)dxdydz$[kg/s] となって，以下の式が得られる。

$$\frac{\partial D(x,y,z)}{\partial x}dydz = \rho(x,y,z)dydz \ \text{[kg/(m·s)]} \tag{C.15}$$

上の例では x 方向の流れ ($D_x(x,y,z)$) だけを考えていたが，y 方向，z 方向の流れもあると考えてそれらを足し合わせると，最終的に，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial D_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial D_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial D_z(\boldsymbol{r})}{\partial z} = \rho(\boldsymbol{r}) \ \text{[kg/(m}^3\text{·s)]} \tag{C.16}$$

が得られる。

湧き出しがあると，そこから四方八方へ流れが生じるように見えるので**発散**という。電磁気学での電束密度ベクトルの発散 $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho$ は，電荷が発散の源であること，磁束密度ベクトルの発散 $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ は「単磁極」が存在しないことをそれぞれ意味している。

C.2.4　* rot の意味

rot は文字通り回転を意味する。それを知るために次の例を考えて見よう。

川底付近では摩擦により流速が遅い。流れの方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとり，川の流速を $v_x(y)$[m/s] としよう (図 C.2 左)。このとき，川を流れる水中の小さな落ち葉が回転力を受けることをみよう。

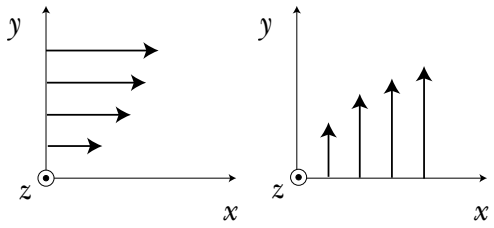

図 C.2: 場所により流速が異なる川。

落ち葉の運動は，流れとともに移動する並進運動と回転運動とに分けられる。ここでは後者を考えるので，落ち葉と一緒に流れる系で考えよう。これは，落ち葉の重心の位置を深さ y_0 としたとき，$v_x(y_0)$ を差し引くことに相当する。落ち葉の上下 $\pm\Delta y$ の点での流速は，$v_x(y_0 \pm \Delta y) - v_x(y_0)$ となる。落ち葉にはたらく粘性抵抗力は流速に比例するので，比例係数を β とすると，

$$\begin{aligned} \text{粘性抵抗力} &= \beta\left(v_x(y_0 \pm \Delta y) - v_x(y_0)\right) \\ &\simeq \pm\,\beta \left.\frac{dv_x}{dy}\right|_{y_0} \Delta y \ [\mathrm{N}] \end{aligned} \tag{C.17}$$

と書ける。すなわち，落ち葉には，落ち葉を回転させようとする偶力がはたらく。Δy で割って (単位長さ当たりの力に直して),

$$\text{偶力の大きさ} \propto \left.\frac{dv_x}{dy}\right|_{y_0} \tag{C.18}$$

となる。その回転の向きは，$\left.\frac{dv_x}{dy}\right|_{y_0} > 0$ の場合は，$-z$ 方向となる。

x 方向でなく，y 方向に流れがある場合は (図 C.2 右)，落ち葉の位置 x_0 での偶力の大きさは,

$$\text{偶力の大きさ} \propto \left.\frac{dv_y}{dx}\right|_{x_0} \tag{C.19}$$

となり，その向きは，$\left.\frac{dv_y}{dx}\right|_{x_0} > 0$ のとき $+z$ 方向である[4]。xy 平面内で，x, y 両方向の流れがある場合は，流速は，$\boldsymbol{v}(x, y, z)$ となり，x, y 両方向の回転力を合計すると，点 (x_0, y_0) の周りの回転は，微分を偏微分に変えて，$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$ に比例する。すなわち，$(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_z$ に比例し，向きは $\pm z$ 方向である。

流れが xy 平面だけでない場合には，z 方向の回転ばかりではなく，x, y 方向の偶力が生じ，全体の偶力は，$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ に比例することになる。

上では，実際に回転力を受ける例を挙げたが，任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して $\mathrm{rot}\boldsymbol{A} \neq 0$ の場合は，その点で「渦」(各点で回転するようなベクトル成分) が存在することを意味している。

問題 C.2 回転する円板

角速度 ω[rad/s] で回転する円板上の，任意の点における速度ベクトルの rot を計算しなさい。⋈

[4]流れの勾配は，$\frac{dv_x}{dy}, \frac{dv_y}{dx}$ が正の場合に正しい符号になるようにとる。

C.2.5　ベクトル解析の公式

よく使われる公式としては，任意のスカラー場 ϕ とベクトル場 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{A} && \text{(C.20)}\\
\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{A}) &= \mathrm{grad}\phi\cdot\boldsymbol{A}+\phi\mathrm{div}\boldsymbol{A} && \text{(C.21)}\\
\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{B} && \text{(C.22)}\\
\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) &= 0 && \text{(C.23)}\\
\mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi) &= \boldsymbol{\nabla}^2\phi\equiv\Delta\phi && \text{(C.24)}\\
\mathrm{rot}(\phi\boldsymbol{A}) &= \mathrm{grad}\phi\times\boldsymbol{A}+\phi\mathrm{rot}\boldsymbol{A} && \text{(C.25)}\\
\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) &= 0 && \text{(C.26)}\\
\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) &= \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A} && \text{(C.27)}\\
\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A}\mathrm{div}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\mathrm{div}\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} && \text{(C.28)}
\end{aligned}$$

問題 C.3 公式の検証
これらの公式が成り立つことを確かめなさい。⋈

C.3　* 波動方程式

波動は媒質を伝わっていく[5]。物体の運動であるので，波動もニュートンの運動方程式に従う。しかしながら，波動は位置と時間の関数であるので，必然的に偏微分を用いた方程式となる。それが**波動方程式** (wave equation) である。ここでは，ニュートンの運動方程式からどのように波動方程式が導かれるかを学んで，その解について考察しよう。

C.3.1　1 次元の波動方程式

z 方向に速さ v で進む波は，位置 z，時刻 t の変位 (平衡点からのずれ) を $\eta(z,t)$ として

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\ \text{(1 次元の波動方程式)} \tag{C.29}$$

と書ける[6]。この式を 1 次元の波動方程式とよぶ。

媒質を伝わる波は，力学的に生じる波である。したがって，ニュートン力学から波動方程式を導くことができる。本節では，弦を伝わる横波，弾性体を伝わる縦波，横波について考察しよう。

弦を伝わる波

ぴんと張った弦を考えよう。弦を，弦と垂直な方向に弾くと横波が生じる。波動方程式を導き，その速さを求めよう。

[5]光は例外である。光，ずなわち電磁波は，真空中をも伝わることができる。

[6]通常，変位の次元は長さである。したがって SI 単位系での単位は m である。しかしながら例えば，交流の電圧の波，電流の波など，変位が必ずしも長さとは限らない場合も多い。そのためどういう波かが指定されていない場合には，波動方程式の単位は書かないことにする。

例題 C.3 弦を伝わる波の速さと波動方程式
張力 τ[N] で z 方向に張った線密度 ξ[kg/m] の弦がある。変位を η[m] とするとき，弦を伝わる波の波動方程式を導出し，その速さ v[m] が

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\xi}}\ [\mathrm{m/s}]\ (\text{弦を伝わる波の速さ}) \tag{C.30}$$

で与えられることを示しなさい。

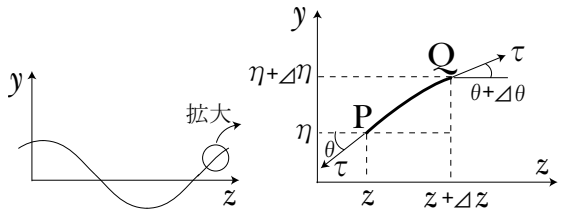

図 C.3: 弦を伝わる波。

[解]　図 C.3 のように微小部分の運動を考える。張った弦の長さ方向を z 軸，変位の方向を y 軸にとる。PQ 部分にはたらく力は，$\theta \ll 1, \Delta\theta \ll 1$ として

$$\begin{aligned}
F_z &= \tau\left(\cos(\theta+\Delta\theta)-\cos\theta\right) \\
&= \tau\left(\cos\theta\cos\Delta\theta-\sin\theta\sin\Delta\theta-\cos\theta\right) \\
&\simeq \tau\left((1+\frac{\Delta\theta)^2}{2})\cos\theta-\theta\Delta\theta-\cos\theta\right) \simeq 0 \\
F_y &= \tau\left(\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta\right) \\
&= \tau\left(\sin\theta\cos\Delta\theta+\cos\theta\sin\Delta\theta-\sin\theta\right) \\
&\simeq \tau\left(\sin\theta+\Delta\theta-\sin\theta\right) \simeq \tau\Delta\theta\ [\mathrm{N}]
\end{aligned} \tag{C.31}$$

ここで，$\theta \simeq \tan\theta$ であり，$\tan\theta$ は $\eta(z,t)$ の z での傾きなので，$\tan\theta \simeq \partial\eta/\partial z$ となる。このことを用いると

$$\Delta\theta \simeq \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\Delta z \tag{C.32}$$

となる。PQ 部分 (質量 $\xi\Delta z$[kg]) の y 方向の運動方程式 (質量 × 加速度 = 力) は，(C.31) と (C.32) より，

$$(\xi\Delta z)\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = F_y = \tau\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\Delta z\ [\mathrm{N}] \tag{C.33}$$

と書ける。すなわち，

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\xi}\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} \tag{C.34}$$

となって波動方程式が導出され，その速さは (C.30) で与えられることがわかる。◇

弾性体を伝わる波

弾性体に**ひずみ** (単位長さ当りの変位，strain) を与えた場合に伝わる**弾性波** (elastic wave) について考えよう。

まず，弾性体を伝わる**縦波** (longitudinal wave) について波動方程式を導こう。

例題 C.4 弾性体を伝わる縦波とその速さ
ヤング率 E[Pa]，密度 ρ[kg/m^3] の弾性体を伝わる縦波の速さ v[m/s] は，

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ [m/s] (弾性体を伝わる縦波の速さ)} \tag{C.35}$$

で与えられることを導きなさい。

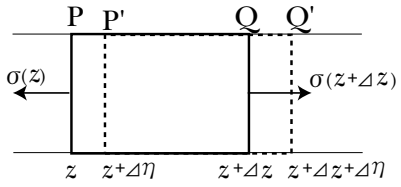

図 C.4: 弾性体を伝わる縦波。

[解] 例題 C.3 と同様に微小部分の運動方程式を立てる (図 C.4)。断面積 A[m^2] の微小部分 PQ が，波によって P′Q′ に変位したと考えよう。断面積 P にはたらく**応力** (単位面積当りの力：stress) $\sigma(z,t)$ は，ヤング率の定義によって次式で与えられる。

$$\sigma(z,t) = E\frac{\partial \eta(z,t)}{\partial z} \text{ [Pa]} \tag{C.36}$$

よって，PQ 部分に z 方向にはたらく力 F_z[N] は，

$$\begin{aligned} F_z &= A(\sigma(z+\Delta z,t) - \sigma(z,t)) \simeq A\left(\sigma(z,t) + \frac{\partial \sigma(z,t)}{\partial z}\Delta z - \sigma(z)\right) \\ &\simeq EA\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\Delta z \text{ [N]} \end{aligned} \tag{C.37}$$

となる。PQ 部分 (質量 $\rho A\Delta z$[kg]) の z 方向の運動方程式は，

$$\rho A\Delta z\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = F_z = EA\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\Delta z \text{ [N]} \tag{C.38}$$

と書ける。すなわち，

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \tag{C.39}$$

と書けて波動方程式が導けた。(C.29) と (C.39) より，伝わる波の速さは (C.35) で与えられる。◇

問題 C.4 弾性棒を伝わる横波の速さ
剛性率 G，密度 ρ の弾性棒を伝わる**横波** (transverse wave) の速さ v が，

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \text{ [m/s] (弾性棒を伝わる横波の速さ)} \tag{C.40}$$

と与えられることを示しなさい。⋈

地震波 (C.35) と (C.40) から，密度 ρ の弾性体を伝わる波の速さは，縦波では $\sqrt{E/\rho}$ および横波では $\sqrt{G/\rho}$ となる。ここで E はヤング率，G は剛性率であり，一般に $E > G$ である。このため，地震波では最初に感じる P 波 (Primary wave) は縦波でその速さは約 5 km/s，S 波 (Secondary wave) は横波でその速さは約 3 km/s である (いずれも地表付近での速さ)。このことを利用して，P 波の持続時間から震源地までのおよその距離がわかる。また，最初の揺れが横揺れのときは震源地は比較的遠くであるが，縦に揺れた場合は直下型地震とわかる。

次に，波動方程式の一般解について考察しよう。

例題 C.5 1 次元の波動方程式の解

$$\eta(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt) \tag{C.41}$$

が，1 次元の波動方程式の解であることを示しなさい。

[解] まず，第 1 項が解であることを示そう。$X = z - vt$ とおこう。$f(X)$ を z で偏微分しよう。

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial z} = f'(X) \tag{C.42}$$

さらに偏微分すると，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''(X) \tag{C.43}$$

となる。同様に

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 f''(X) \tag{C.44}$$

を得る。したがって (C.29) を満足する。まったく同様に $g(z + vt)$ も解であることが示せる。したがって，その和も波動方程式を満たすので，解である。◇

問題 C.5 波の進行方向

(C.41) の右辺第 1 項は $+z$ 方向へ進む波，第 2 項は $-z$ 方向へ進む波を表すことを示しなさい。⋈

C.3.2 3 次元の波動方程式

これまでの議論を 3 次元に拡張して，速さ v で進む 3 次元の波を $\phi(x,y,z,t)$ とすると，波動方程式は，

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \phi \tag{C.45}$$

と書ける[7]。3 次元の波動方程式の解として，(C.41) で与えられる平面波の解のほかに，次の (C.46) で表される球面波の解などがある。

$$\phi(r,t) = \frac{f(r - vt)}{r} + \frac{g(r + vt)}{r} \tag{C.46}$$

[7]実は，3 次元の波動方程式 (C.45) は相対論的不変性を満たしている。すなわち，速さが光速に近くなっても成り立つ方程式であり，電磁波もこの波動方程式に従う。

C.4　マクスウェル方程式

マクスウェル方程式は，次の 4 つの法則を式で表わしたものである。

(1) 電束密度に対するガウスの法則
任意の閉曲面を貫く全電束は，その内部に含まれる全電荷に等しい。
(2) 磁束密度に対するガウスの法則
任意の閉曲面を貫く全磁束は，ゼロである。
(3) アンペール-マクスウェルの法則
電流 (変位電流を含む) があると，周りに磁場ができる。
(4) ファラデーの法則
閉回路を貫く磁束が時間変化すると，起電力がそれを妨げる向きに生じる。

C.4.1　マクスウェル方程式 (積分形)

表 C.1: 電磁気学での場の量

場の量	記号	単位	真空中での値 (関係式)
電場	$\boldsymbol{E}$	[V/m]	
電束密度	$\boldsymbol{D}$	[C/m^2]	$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$
磁場	$\boldsymbol{H}$	[A/m]	
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	[T]	$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$
電荷密度	ρ	[C/m^3]	0
電流密度	$\boldsymbol{J}$	[A/m^2]	0

場の量を表 C.1 のように定義する[8]。ここで，ε_0 は真空の誘電率， μ_0 は真空の透磁率である。

4 つの法則を積分形で書くと，次のようになる。

(1) $$\oint_{(\mathrm{S})} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{(\mathrm{V})} \rho(\boldsymbol{r})\, dV \ \ [\mathrm{C}] \ (\text{電荷に対するガウスの法則}) \tag{C.47}$$

(2) $$\oint_{(\mathrm{S})} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \ (\text{磁極に対するガウスの法則}) \tag{C.48}$$

(3) $$\oint_{(\mathrm{C})} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{(\mathrm{S})} \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} \ \ [\mathrm{A}] \ (\text{アンペール} - \text{マクスウェルの法則}) \tag{C.49}$$

(4) $$\oint_{(\mathrm{C})} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(\mathrm{S})} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{S} \ \ [\mathrm{V}] \ (\text{ファラデーの法則}) \tag{C.50}$$

ここで，(1) と (2) は立体 (V) での体積分とその表面 (S) 上での面積分との関係，(3) と (4) は，曲面 (S) 上の面積分とその曲面の縁 (C) を 1 周する線積分との関係を与えている。ここで $\oint$ は，面積分については，閉曲面上での積分，線積分については，閉曲線上での積分を表す。$d\boldsymbol{S}$[m^2] は，大きさが微小面積 dS，向きが閉曲面から外向きに微小面に垂直なベクトルを表す。これらの積分については C.5 節で説明する。

[8]磁場 $\boldsymbol{H}$ は，磁気力において，電気力における電場 $\boldsymbol{E}$[V/m] に対応する量。$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ および $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ は真空中，または一様な物質中では比例関係にあるが，一般には，大きさも向きも異なる，互いに独立な場の量である。

C.4.2 マクスウェル方程式 (微分形)

積分形のマクスウェル方程式に，C.5 節で説明するガウスの定理[9]，ストークスの定理を適用して微分形で書くと次のようになる。

$$(1) \quad \mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \ [\mathrm{C/m^3}] \ (\text{電荷に対するガウスの法則}) \tag{C.51}$$

$$(2) \quad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \ (\text{磁極に対するガウスの法則}) \tag{C.52}$$

$$(3) \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \ [\mathrm{A/m^2}] \ (\text{アンペール} - \text{マクスウェルの法則}) \tag{C.53}$$

$$(4) \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \ [\mathrm{V/m^2}] \ (\text{ファラデーの法則}) \tag{C.54}$$

真空中のマクスウェル方程式 (微分形) から，電場ベクトルや磁束密度ベクトルが波動方程式を満たし，$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ [m/s] が導かれることを次の例題で見よう。

例題 C.6 電磁波の解
真空中のマクスウェル方程式から，電場 $\boldsymbol{E}$[V/m] や磁場 $\boldsymbol{H}$[A/m] が波動方程式を満たすこと，および光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ [m/s] であることを導きなさい。ただし，任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し，公式 $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ が成り立つことを用いなさい。

[解] 真空中では，$\rho = \boldsymbol{J} = 0$ である。真空中で成り立つ $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$[C/m^2]，$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$[T] を用いてマクスウェル方程式を $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ で表すと，

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{E} &= 0 \\ \mathrm{div}\boldsymbol{H} &= 0 \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \ [\mathrm{V/m^2}] && \text{(C.55)} \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{H} &= +\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \ [\mathrm{A/m^2}] && \text{(C.56)} \end{aligned}$$

が得られる。(C.55) の rot をとると，

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathrm{rot}\boldsymbol{H}}{\partial t} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \ [\mathrm{V/m^3}] \tag{C.57}$$

となり，$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0$ より

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \ [\mathrm{V/m^3}] \tag{C.58}$$

となり，波動方程式が導け，

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \ [\mathrm{m/s}] \tag{C.59}$$

と求まる。$\boldsymbol{H}$[A/m] についても同様である。◇

C.5 線積分，面積分，体積分

場の量の積分には，線に沿った積分 (線積分)，曲面上での積分 (面積分)，立体内での積分 (体積分) が使われる。ここで，その説明をしておこう。考え方は B.2 節で述べた 1 次元

[9]定理とは数学用語であり，最小限の公理から導かれる真理をいう。

の積分の場合とまったく同じで，ただ微小要素が曲線に沿った線素，曲面上の面積要素，立体内の体積要素となるだけである。

積分の際に用いる基本の座標系は直交直線 (デカルト) 座標系である。2 次元では平面に x, y 座標，3 次元では空間に x, y, z 座標を右手直交系を成すようにとる。この場合の面積要素は微小長方形 $dxdy$，体積要素は微小直方体 $dxdydz$ である。

C.5.1　極座標系での積分

場合によっては，A.1 節で説明した極座標系を用いて積分すると便利なことがある。ここでは，まず極座標系での体積要素について解説しておく。それらの具体的な活用は後に行う。

円筒極座標：平面の場合は $z = 0$ の平面極座標を考える。この場合の面積要素は，微小長方形 $dr \times rd\varphi = rdrd\varphi$ である。3 次元の座標系での体積要素は，微小直方体 $rdrd\varphi dz$ である (図 C.5 左)。

球面極座標：この座標系での体積要素は，微小直方体 $dr \times rd\theta \times r\sin\theta d\varphi = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$ である (図 C.5 右)。

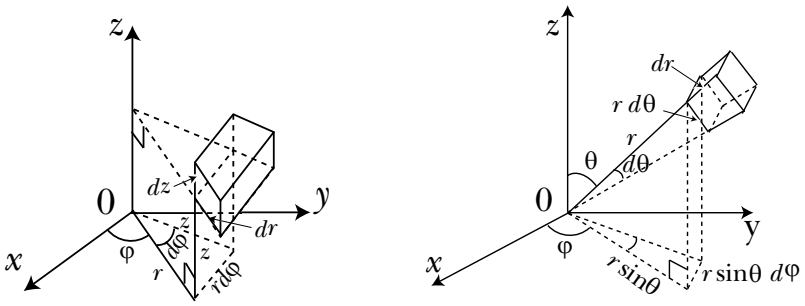

図 C.5: 円筒座標系 (左) と球面極座標 (右) での体積要素。

C.5.2　線積分

ある曲線に沿ってスカラー量が定義されているとき，その量を曲線に沿って積分する場合について考えよう。まず具体的な例として，スカラー量が線電荷密度のときを考えよう。

例題 C.7 帯電した曲線上の全電荷
曲線 l 上に電荷が分布している。その全電荷を求める式を書きなさい。

[解] 曲線 l 上に原点をとり，その右方向を正としてそこからの長さを x とする。点 x での線電荷密度を $\zeta(x)$[C/m] としよう。曲線の両端の x 座標を $x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}$ として，その間を n 等分し，$\Delta x = \frac{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}{n}$[m] とおこう。$x_i \equiv x_{\mathrm{A}} + (i-1)\Delta x$[m] と $x_i + \Delta x$[m] の間にある電荷は，$\zeta(x_i)\Delta x$[C] である (図 C.6)。全電荷はその総和となる。$n \to \infty$ として積分の定義により，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \zeta(x_i)\Delta x = \int_{x_{\mathrm{A}}\ (\mathrm{l})}^{x_{\mathrm{B}}} \zeta(x)dx \ [\mathrm{C}] \tag{C.60}$$

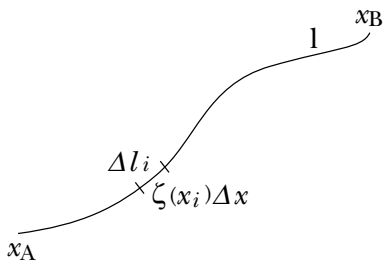

図 C.6: 曲線 l に沿っての電荷の積分。

と書ける。ここで，$\int_{(\mathrm{l})}$ は，曲線 l に沿っての線積分を表している。◇

この具体的な積分計算については，B.2 節での場合と同じである。すなわち曲線を伸ばして直線とし，それに沿って x 軸をとれば，その場合と一致する。

次にベクトル場があり，曲線に沿ってのスカラー量が，曲線の接線方向とベクトル場との内積である場合の例を考えよう。ベクトル場を電場 $\boldsymbol{E}$[V/m] としよう (図 C.7)。曲線 l を上と同様に n 等分し，i 番目の微小部分 Δl_i[m] にベクトル $\Delta \boldsymbol{l}_i$[m] を対応させよう。$\Delta \boldsymbol{l}_i$[m] は，大きさが Δl[m] で，向きが，その点での接線方向 (原点から正の向きに遠ざかる方向を正とする) のベクトルである。すると，スカラー量は $\boldsymbol{E}_i \cdot \Delta \boldsymbol{l}_i$[V] と書ける。ただし，$\boldsymbol{E}_i$[V/m] はその点での電場ベクトルとする。よって，曲線 l に沿っての電場の総和は，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i \cdot \Delta \boldsymbol{l}_i = \int_{x_{\mathrm{A}}\ (\mathrm{l})}^{x_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}\ [\mathrm{V}] \tag{C.61}$$

特に，l が閉曲線 C である場合，$\int_{x_{\mathrm{A}}\ (\mathrm{l})}^{x_{\mathrm{B}}}$ を $\oint_{(\mathrm{C})}$ と書く。

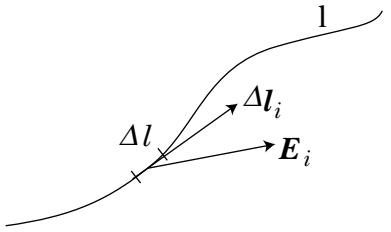

図 C.7: 曲線 l に沿っての電場の総和の積分。

C.5.3　面積分

ある曲面上でスカラー量が定義されているとき，その量の積分について考えよう (面積分)。まず具体的な例として，スカラー量が面電荷密度のときを考えよう。

例題 C.8 帯電した曲面上の全電荷
曲面 S 上に電荷が分布している。その全電荷を求める式を書きなさい。

[解] 曲面 S を n 個に細分化し，i 番目の微小面積を $\Delta S_i[\mathrm{m}^2]$ としよう。そこでの電荷は $\sigma_i \Delta S_i[\mathrm{C}]$ となるので，全電荷は，その総和となる。ここで，$\sigma_i[\mathrm{C/m}^2]$ はその点での面電荷密度である。$n \to \infty$ として積分の定義により，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \Delta S_i = \int_{(\mathrm{S})} \sigma dS \ [\mathrm{C}] \tag{C.62}$$

と書ける。ここで，$\int_{(\mathrm{S})}$ は，曲面 S 上の積分である。◇

次に，具体的な例で，積分を計算してみよう。

例題 C.9 円板上の電荷
半径 R の円板が一定の面電荷密度 $\sigma[\mathrm{m/s}^2]$ で帯電している。全電荷 $Q[\mathrm{C}]$ を求めなさい。

[解] 円板の面積が $\pi R^2[\mathrm{m}^2]$ なので，もちろん答えは $Q = \pi R^2 \sigma[\mathrm{C}]$ である。
[別解 1] 直交直線 (デカルト) 座標系による積分
ここでは，実際に積分で求めてみよう。円板の中心を原点とし，直交する x 軸，y 軸をとる。$dS = dxdy[\mathrm{m}^2]$ とすると，全電荷 $Q[\mathrm{C}]$ は以下のようになる。

$$Q = \int_{(\mathrm{S})} \sigma dxdy = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sigma dy = 2\sigma \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx \ [\mathrm{C}] \tag{C.63}$$

ここでは，x を与えたときの y の積分をまず行っている。このとき $x^2 + y^2 \leq R^2 \ [\mathrm{m}^2]$ に注意すると，y の積分範囲が決まる。$\sigma[\mathrm{C/m}^2]$ が一定だから，y の積分はすぐにできて (C.63) となる。
(C.63) の積分は，$x = R\sin\theta$ と変数変換することにより，計算できる。$dx = R\cos\theta d\theta$ で積分範囲は $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ までとなる。

$$Q = \sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R^2 \cos^2\theta d\theta = 2R^2\sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 2R^2\sigma \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2 \sigma \ [\mathrm{C}] \tag{C.64}$$

[別解 2] 平面極座標系を用いての積分
平面極座標系 (r, φ) を用いると，面積は直接的に求まる。$dS = dr \times rd\varphi$ であるから，

$$Q = \sigma \int_0^R dr \int_0^{2\pi} rd\varphi = 2\pi\sigma \int_0^R rdr = 2\pi\sigma \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2 \sigma \ [\mathrm{C}] \tag{C.65}$$

と求まる。◇

次に，平面ではない例を計算してみよう。

例題 C.10 球面上の電荷
半径 $R[\mathrm{m}]$ の球面が，一定の面密度 $\sigma[\mathrm{m/s}^2]$ で帯電している。全電荷 $Q[\mathrm{C}]$ を求めなさい。

[解] 球表面の面積が $4\pi R^2[\mathrm{m}^2]$ なので，もちろん，答えは $Q = 4\pi R^2\sigma[\mathrm{C}]$ である。
[別解] 球面極座系による積分
　このような場合，球面極座標系 (r, θ, φ) を用いると面積は直接的に求まる。$dS = Rd\theta \times R\sin\theta d\varphi[\mathrm{m}^2]$(図 C.5) であるから，

$$Q = R^2\sigma \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2\sigma\,[-\cos\theta]_0^{\pi} = 4\pi R^2\sigma\ [\mathrm{C}] \tag{C.66}$$

と求まる。◇

　次にベクトル場があり，曲面上でのスカラー量が，曲面の法線方向とベクトル場の内積である場合の例を考えよう。ここでベクトル場を電束密度ベクトル $\boldsymbol{D}[\mathrm{C/m}^2]$ としよう。曲面 S を上と同様に n 個に細分化し，i 番目の微小面積 $\Delta S_i[\mathrm{m}^2]$ にベクトル $\boldsymbol{\Delta S}_i[\mathrm{m}^2]$ を対応させよう。$\boldsymbol{\Delta S}_i[\mathrm{m}^2]$ は，大きさが $\Delta S_i[\mathrm{m}^2]$ で，向きがその点での法線方向のベクトルである。するとスカラー量は $\boldsymbol{D}_i \cdot \boldsymbol{\Delta S}_i[\mathrm{C}]$ と書ける。ただし，$\boldsymbol{D}_i$ はその点での電束密度ベクトルである。よって曲面 S 上の全電束は，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{D}_i \cdot \boldsymbol{\Delta S}_i = \int_{(\mathrm{S})} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S}\ [\mathrm{C}] \tag{C.67}$$

特に，S が閉曲面である場合 $\int_{(\mathrm{S})}$ を $\oint_{(\mathrm{S})}$ と書く。

　1 次元の場合，関数 $f(x)$ の x_{A} から x_{B} までの積分 $\int_{x_{\mathrm{A}}}^{x_{\mathrm{B}}} f(x)dx$ が $x = x_{\mathrm{A}}$，$x = x_{\mathrm{B}}$，$f(x)$，および x 軸とで囲まれた面積を表した。それと同様に，2 次元の積分が体積を与えることを次の例で見よう。

例題 C.11 海に浮かぶ島の海面上の体積
海に浮かぶ島の海面上の体積を求める式を書きなさい。

[解] 海抜ゼロでの島の面を S，その面積を S とし，水平面内に直交する x 軸，y 軸をとる。島内の座標 (x, y) の位置での島の海面からの高さ (海抜) を $h(x, y)$ とすると，微小面積を $dS = dxdy$ として，微小体積は $h(x, y)dxdy$，したがって，島の海面上の体積は

$$\int_{(\mathrm{S})} h(x, y)dxdy\ [\mathrm{m}^3] \tag{C.68}$$

と表される。◇

問題 C.6 円錐状の島の体積
　島の形が，水平面上では半径 $R[\mathrm{m}]$ の円形で高さが $h[\mathrm{m}]$ の円錐状であるとき，島の海面上の体積を円筒極座標系 (r, φ, z) を用いて計算しなさい。⋈

C.5.4　体積分

　立体内でスカラー量が定義されているとき，その量の積分について考えよう。まず具体的な例として，スカラー量が体電荷密度のときを考えよう。

例題 C.12 帯電した物体の全電荷
物体内に電荷が分布している。その全電荷を求める式を書きなさい。

[解] 物体 V を n 個に細分化し，i 番目の微小体積を $\Delta V_i[\mathrm{m}^3]$ としよう。そこでの電荷を $\rho_i \Delta V_i[\mathrm{C}]$ とすると，全電荷は，その総和となる。ここで，$\rho_i[\mathrm{C/m}^3]$ はその点での体電荷密度である。$n \to \infty$ として，積分の定義により，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho_i \Delta V_i = \int_{(\mathrm{V})} \rho dV \ [\mathrm{C}] \tag{C.69}$$

と書ける。ここで，$\int_{(\mathrm{V})}$ は，物体内の積分である。◇

具体的に体積分を実行してみよう。

例題 C.13 球の電荷
半径 R の球が一定の体電荷密度 $\rho[\mathrm{m/s}^3]$ で帯電している。全電荷 $Q[\mathrm{C}]$ を求めなさい。

[解] 球の体積が $\frac{4\pi R^3}{3}[\mathrm{m}^3]$ で体電荷密度が一定なので，もちろん答えは $Q = \frac{4\pi R^3}{3}\sigma[\mathrm{C}]$ である。
[別解 1] 直交直線 (デカルト) 座標系による積分
ここでは実際に積分で求めてみよう。球 V の中心を原点とし直交する x 軸，y 軸，z 軸をとる。$dV = dxdydz[\mathrm{m}^3]$ とすると，全電荷 $Q[\mathrm{C}]$ は

$$\begin{aligned} Q &= \int_{(\mathrm{V})} \rho dxdydz = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \rho dz \\ &= 2\pi\rho \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx \ [\mathrm{C}] \end{aligned} \tag{C.70}$$

ここでは，x, y を与えたときの z の積分をまず行い，次に y の積分を行っている。このとき，$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2[\mathrm{m}^2]$ に注意すると，z, y の積分範囲が決まる。$\rho[\mathrm{C/m}^3]$ が一定だから z の積分はすぐにでき，また，y の積分は (C.65) で $R[\mathrm{m}]$ の代わりに $\sqrt{R^2 - x^2}[\mathrm{m}]$ とおいて，(C.70) となる。この積分は簡単にできて解と一致する答えを得る。
[別解 2] 球面極座標系を用いての積分
球面極座標系 (r, θ, φ) を用いると，体積は直接的に求まる。$dV = dr \times rd\theta \times r\sin\theta d\varphi[\mathrm{m}^3]$ であるから (図 C.5 右),

$$Q = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \ [\mathrm{C}] \tag{C.71}$$

となり，解 1 と一致する答えを得る。◇

C.5.5 ガウスの定理

ガウスの定理は，立体 V 内の体積分と，V の表面 S 上の面積分との間に成り立つ関係である。任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に対して，ガウスの定理は次式で表される。

$$\int_{(\mathrm{V})} \mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \, dV = \oint_{(\mathrm{S})} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{C.72}$$

この式が成り立つことを示そう。図 C.8 左のように，微小な直方体を考えよう。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_x^{x+\Delta x} dx \int_y^{y+\Delta y} dy \int_z^{z+\Delta z} dz \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\
&= \int_y^{y+\Delta y} dy \int_z^{z+\Delta z} dz \left(A_x(x+\Delta x, y.z) - A_x(z,y,z) \right) \\
&\quad + \int_z^{z+\Delta z} dz \int_x^{x+\Delta x} dx \left(A_y(x, y+\Delta y, z) - (x,y,z) \right) \\
&\quad + \int_x^{x+\Delta x} dx \int_y^{y+\Delta y} dy \left(A_z(x,y,z+\Delta z) - A_z(x,y,z) \right) \qquad \text{(C.73)}
\end{aligned}
$$

これが (C.72) の右辺の表面積分を意味していることは明らかである。任意の形の体積については，微小な直方体を足し合わせればよい (図 C.8 右)。

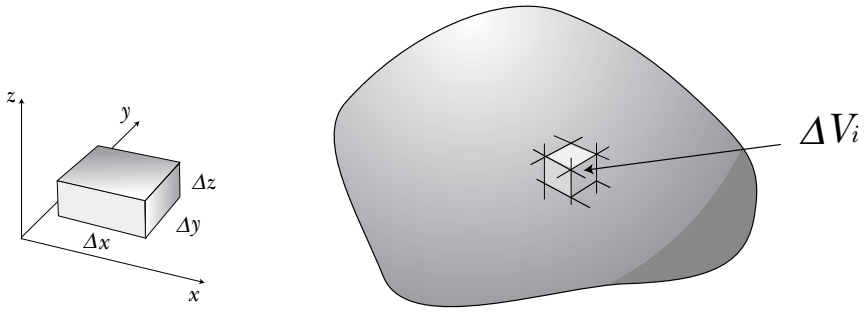

図 C.8: 左：微小体積に対するガウスの定理，右：有限体積に対するガウスの定理。

これを，マクスウェルの式 ((C.47) の左辺と右辺を入れ替えたもの) に適用しよう。

$$
\int_{(\mathrm{V})} \rho(\boldsymbol{r})\, dV = \oint_{(\mathrm{S})} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{(\mathrm{V})} \mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) dV \ [\mathrm{C}] \qquad \text{(C.74)}
$$

となり移項して，

$$
\int_{(\mathrm{V})} (\mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) - \rho(\boldsymbol{r})) dV = 0 \ [\mathrm{C}] \qquad \text{(C.75)}
$$

となる。任意の立体での積分において，積分値がゼロであることは，中身がゼロ，すなわち，次式を得る。

$$
\mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \ [\mathrm{C/m^3}] \qquad \text{(C.76)}
$$

これがガウスの法則である。すなわち，定理は数学の等式等であり法則は異なった物理量間の関係を表す。

C.5.6　ストークスの定理

ストークスの定理は，曲面 S 上の面積分と，S の縁，閉曲線 C 上の線積分との間に成り立つ関係である。任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に対して，ストークスの定理は次式で表される。

$$
\oint_{(\mathrm{C})} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{(\mathrm{S})} \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \qquad \text{(C.77)}
$$

考えるべき微小面積 S が xy 平面上にある場合について，この式が成り立つことを示そう。図 C.9 左のように，S を微小長方形にとろう。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= A_x(x,y,z)\Delta x + A_y(x+\Delta x,y,z)\Delta y - A_x(x,y+\Delta y,z)\Delta x - A_y(x,y,z)\Delta y \\
&= \left(\frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \qquad \text{(C.78)} \\
&= \left(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(x,y,z)\right)_x \Delta x\Delta y \qquad \text{(C.79)}
\end{aligned}
$$

これが (C.77) の右辺の積分に等しいことは明らかである。任意の形の閉曲面については，微小な長方形を足し合わせればよい (図 C.9 右)。

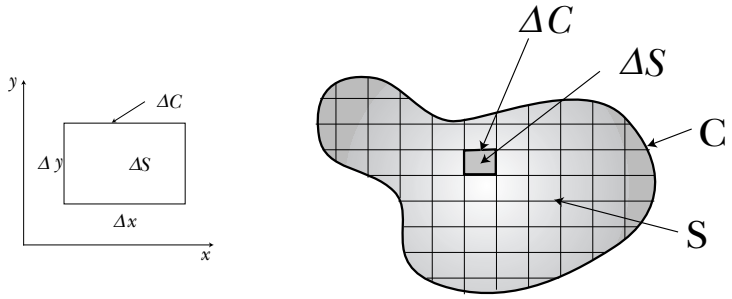

図 C.9: ストークスの定理： 左；微小面積，右；有限の面積。

これをファラデーの式 ((C.50) の左辺と右辺を入れ替えたもの) に適用しよう。

$$
-\int_{(\mathrm{S})} \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{(\mathrm{C})} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{(\mathrm{S})} \mathrm{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}\ [\mathrm{V}] \qquad \text{(C.80)}
$$

となる。移項して，

$$
= \int_{(\mathrm{S})} \left(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} = 0\ [\mathrm{V}] \qquad \text{(C.81)}
$$

となる。任意の面についての面積分がゼロということは，中身がゼロを意味する。したがって，

$$
\mathrm{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\ [\mathrm{V/m^2}] \qquad \text{(C.82)}
$$

が得られる。

付 録D　音と光

本書では割愛せざるを得なかった音と光について，基礎的なことを学ぼう。

D.1　音

今日では，物質中を伝わる力学的波である音波 (acoustic wave) を総称して音と言う。しかし，本節では空気中を伝わり，耳に聞こえる音 (sound) を主に扱う。人間が認識できる音の振動数は，個人差はあるが 20Hz〜20kHz の範囲である。10kHz より高い振動数の音波を超音波といい，ソナーや超音波診断などに利用されている。

耳で聞こえる音には，心地よい音，耳ざわりな音，単調な音など様々である。どこからそのような違いが生じるのであろうか。そもそも音楽はなぜ音楽になっているのであろうか。本節ではそのようなことを意識しつつ，音の性質について考察しよう。

D.1.1　音速

本節では音速はどのように表されるかについて考えよう。

例題 D.1 空気中の音速
空気中を伝わる音速が，温度 t[℃] の関数として，

$$v(t) \simeq 331.5 + 0.6t \ [\mathrm{m/s}] \tag{D.1}$$

と近似される。この式を導けきなさい。ただし，空気中を伝わる音波は断熱過程で伝わり，空気は理想気体とする。断熱過程では，圧力 p[Pa] と体積 V[m^3] との間に $pV^\gamma =$ 一定の式が成り立つ。$\gamma = c_p/c_V$ は比熱比である。

[解] 空気中を伝わる音速は，C.3 節と同様の解析によって次式で与えられることが導ける。

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \ [\mathrm{m/s}] \tag{D.2}$$

ρ[kg/m^3] は密度，K[Pa] は体積弾性率で

$$K = -\frac{dp}{dV/V} = -V\frac{dp}{dV} \ [\mathrm{Pa}] \tag{D.3}$$

が定義式である。断熱変化の条件 $p \propto V^{-\gamma}$(教科書 p168) より

$$K = \gamma p \ [\mathrm{Pa}] \tag{D.4}$$

したがって t =0 ℃での圧力と密度の値を p_0，ρ_0 として，ボイル・シャールの法則 (教科書 p148，(10.9)) より

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}} = v_0 \sqrt{\frac{T_0 + t}{T_0}} \simeq v_0 \left(1 + \frac{t}{2T_0}\right) \text{ [m/s]} \tag{D.5}$$

値を代入すると，(D.1) が得られる。◇

D.1.2　音の高さと音色

音の高低が振動数の高低に対応していることはよく知られている。そこでまず音階について考察してみよう。どのように音階は発達し，どのように定められているのだろうか。また，同じ高さの音でも楽器によって奏でる音が異なって聞こえる (音色が違う) のはなぜだろうか。その理由について考えてみよう。

音階

音楽の発達の歴史の中で，人類は**音階** (scale) を生み出した。人類は歌うとき，連続した音声ではなく，とびとびの音の列を連ねることを好んだ。いろいろな民族はそれぞれ固有の音階をもっている。しかしながら，いろいろな民族のどの音階においても，**オクターブ** (octave) が一つの単位になっていることは大変興味深い。1 オクターブ離れた二つの音は，振動数で 2 倍の関係にある。また，音階の最小の音の間隔は半音である。

ハ長調 (C major) 音階では 1 オクターブを 7 つに分割し，ドレミファソラシド (これらを階音という) の各音の間を，それぞれ全音 (a whole tone)，全音，半音 (a semitone, a half tone)，全音，全音，全音，半音に分けている。半音二つ分で全音になる。すなわち，1 オクターブ間を半音ずつに分けると，12 の半音に分けることになる。

現代音楽では**平均律** (equal temperament) が定着している。ハ長調のラ (a^1) の音を 440 Hz とし，その 1 オクターブ上のラ (a^2，880 Hz) の音との間を対数的に 12 等分するのが現在の標準である (表 D.1)。440 Hz と 880 Hz の音は，NHK ラジオ放送の時報として用いられている。

> **例題 D.2** 平均律の振動数
> ハ長調のラの音とその 1 オクターブ上のラの音との間の各音の振動数の値を求めなさい。

[解]　各半音間の振動数の比を r とすると，1 オクターブが 12 個の半音に分けられるので

$$880 = 440 r^{12} \text{ [Hz]} \ \rightarrow r = 2^{1/12} \simeq 1.059 \tag{D.6}$$

この比を順次 440 Hz に乗じて，表 D.1 の値を得る。◇

平均律は，鍵盤楽器 (ピアノ，オルガン等)[1]の発展とともに広まった。その最大の特長は，転調の容易さである。転調の可能性により音楽の魅力は大きく広がる。

[1] これらの楽器では，各音の高さ (振動数) は事前の調律により決められていて，演奏者が演奏中に調節することはできない。

音階とはまさに音の階段であり，平均律では，階段が対数的に等間隔になっている。すなわち，どの段から始めてもドレミの音階を作ることができる。しかしその代償は和音が汚いことである。和音は，振動数が整数比のとき調和してきれいに聞こえるのである。

その反対に**純正律** (pure temperament) は，各音を整数比で分けているため (表 D.1) 和音が心地よい。しかし，音階の段差が不規則なため，鍵盤楽器での使用可能な転調は限られてしまう。

表 D.1: 平均律と純正律

ハ長調	度音	音名	音名	平均律		純正律	
(階名)		(日)	(米)	振動数 (Hz)	比 (a^1 を 1)	振動数 (Hz)	比 (a^1 を 1)
ラ		イ	a^1	440.00	1.000	440.00	1.000
			$a^1\#$	466.16	1.059	–	–
シ		ロ	b^1	493.88	1.122	495.00	9/8=1.125
ド	1	ハ	c^2	523.25	1.189	–	–
			$c^2\#$	554.37	1.260	550.00	5/4=1.250
レ	2	ニ	d^2	587.33	1.335	586.66	4/3=1.330
			$d^2\#$	622.25	1.414	–	–
ミ	3	ホ	e^2	659.26	1.498	660.00	3/2=1.500
ファ	4	ヘ	f^2	698.46	1.587	–	–
			$f^2\#$	739.99	1.682	733.33	5/3=1.667
ソ	5	ト	g^2	783.99	1.762	–	–
			$g^2\#$	830.61	1.888	825.00	15/8=1.875
ラ	6	イ	a^2	880.00	2.000	880.00	2.000

注：ドイツでは，b の代わりに h を用いる。
　イロハなどは，正しくは，その上に a^n 等の n 個だけ点をつけてどの音かを表す。

例題 D.3 素朴な楽器
素朴な楽器として，片方が閉じた竹筒を並べたものがある。開いた口の前で手をたたくと音が鳴り，竹筒の長さを適当に選ぶと音階ができる。ハ長調の音階をつくるには竹筒の長さをどのようにすればよいか。

[解] 竹筒の中にできる空気柱の基本振動は，一方を節，一方を腹とする振動である。したがって竹筒の長さを ℓ[m] とすると，波長は 4ℓ[m] である。空気中の音速を v[m/s] とすると，振動数は $\nu = v/(4\ell)$[Hz] である。i 番目の音階の振動数を ν_i[Hz] とすると

$$\ell_i = \frac{v}{4\nu_i}\ [\mathrm{m}] \tag{D.7}$$

v[m] として空気中の音速 ((D.1))，ν_i として表 D.1 の値等を代入すればよい。実際には，竹筒の実効的長さは実際の長さより少し長い (開口補正[2])。その分，実際の長さを短くしてやる必要がある。◇

[2]音波の波長が開口の直径よりも長い場合，管の長さが半径の約 0.61 倍だけ実効的に長いと考えるとよい。

問題 D.1 パイプオルガンのパイプ

パイプオルガンの最低音を共鳴させるパイプ (両端開放) の長さは約 5m である。最低音の振動数を求めなさい。⋈

問題 D.2 木琴づくり

棒を適当な長さに切り，中心を固定して，ハ長調の音階をもつ木琴をつくりたい。棒を伝わる音速を v[m/s] とするとき，それぞれの棒の長さをどのようにすればよいか。⋈

音色

同じ高さの音を別の楽器で鳴らしたとき，私たちは楽器の違いを聞き分けることができる。人の声の違いも聞き分けることができる。このような識別は，それぞれの**音色** (ねいろ: timbre) の違いを感じてなされる。「黄色い声」という色を使った表現もある。

これらの音の波形をオシロスコープ (波形を表示する装置) で見てみると複雑な波形をしていることがわかる。これらの音には非常に多くの振動数のモードが含まれていることがわかる (図 D.1)。

音色は音の成分，波形，音圧やそれらの時間的変化により決まる。それらの音響的性質と聴覚的印象との関係は，まだそれほど明らかにはなっていないようである。

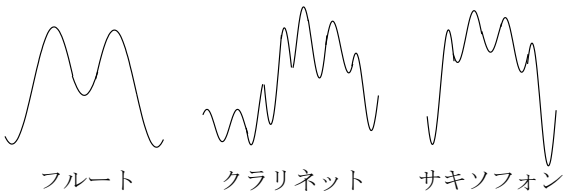

図 D.1: c=256Hz の音

音の分散

音の**分散** (dispersion) とは，音の振動数によって速度が異なる現象である。幸いなことに，空気中を伝わる音波には分散がない。もし分散があったとすると，同時に発せられたいろいろな音階の音が，離れた場所では時間がずれて到達することになる。音の分散があると，オーケストラなどの演奏は，遠くの客席では聞くに堪えない代物になっているに違いない。

音の強さ，大きさ

音の強さは，進行方向に垂直な単位面積を単位時間に流れる波のエネルギーとして定義される。音の強さ I[W/m^2] は

$$I = 2\pi^2 \rho \nu^2 a^2 v \ [\mathrm{W/m^2}] \tag{D.8}$$

と表される。ここで，ρ, ν, a, v はそれぞれ媒質の密度，音波の振動数，振幅，音速である。人間は，音の強さを対数的に感じる。そこで，音の強さのレベルを次のように定義する。

$$L \equiv 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \ [\mathrm{dB}],\ I_0 \equiv 10^{-12} \ [\mathrm{W/m^2}] \tag{D.9}$$

dB はデシベルである。人間が感知できる最小の強さとして I_0[W/m^2] を用いている。

人間の耳の感度は振動数によって異なり，強さのレベルが同じでも，感じる音の強さは異なって聞こえる。そこで，人間の耳に聞こえる音の強さとして，**フォン** (phone) という単位を用いる。このとき，1kHz の純音の強さを基準とし，1kHz で xdB の音を x フォンと定める。他の振動数の音において，その音が 1kHz の xdB の音と同じ大きさに聞こえるとき，その音の強さを x フォンと定める (図 D.2)。

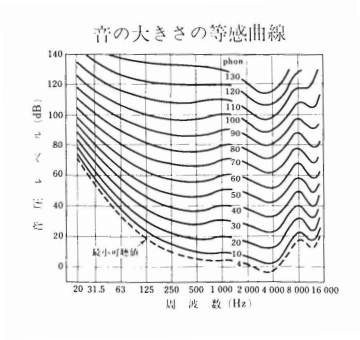

図 D.2: フォンの定義 (理科年表)

D.1.3　音の干渉

音も波であるから干渉する。本節では音の干渉現象について考察しよう。

消音

干渉を利用して特定の場所での音を消すことができる。ヘッドホンにより音楽等を聞く場合, 周囲の騒音を能動的に打ち消す技術も開発されている。

例題 D.4 音が聞こえない位置
同じ振動数 ν[Hz] の 2 つの音叉を離して置き，同時に鳴らした。この音が聞こえない位置はどんな位置か。ただし，v[m/s] を音速とする。

[解] ある点の 2 つの音叉からの距離を ℓ_1, ℓ_2[m] とする。そこでの音が半波長ずれていれば山と谷が消しあい，音が聞こえない。振動数 ν[Hz] の音の波長は $\lambda = v/\nu$ [m] であるから

$$|\ell_1 - \ell_2| = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{v}{\nu} \text{ [m] } (n = 1, 2, \cdots) \tag{D.10}$$

になる位置である。2 点からの距離の差が一定である曲線は，双曲線 (3 次元では双曲面) である。ただし，2 つの音源からの音の強さに違いがあると完全には消えない。◇

うなり

振動数がわずかに異なる 2 つの音を重ねるとうなりが生じる。すなわち，音が大きくなったり小さくなったりをくり返す。

例題 D.5 うなり
振動数が ν_1, ν_2[Hz] の 2 つの音を重ねたとき，1 秒間に聞こえるうなりの回数を求めなさい。

[解] うなりの周期を T_0[s] としよう。T_0[s] の間にうなりが 1 つ生じるので

$$|\nu_1 - \nu_2| \times T_0 = 1 \tag{D.11}$$

したがって 1 秒間に聞こえるうなりの回数 ν[Hz] は

$$\nu = \frac{1}{T_0} = |\nu_1 - \nu_2| \ [\mathrm{Hz}] \tag{D.12}$$

D.1.4　音の回折

音も波であるから回折を起こす。物陰でも音が聞こえるのは回折現象のおかげである。

例題 D.6 昼と夜
夜間には遠くの鐘の音がよく聞こえるが，昼間はあたりが静かでも聞こえにくい。理由を説明しなさい。

[解] 一般に昼間は，地上の温度の方が高く上空ほど低い。このようなときには，図 D.3 右のように音が上方に回折して，遠くまで音が届かない。夜間はこの逆である。昼間は辺りに音が満ち溢れていて音が遠くで聞こえにくいという面もある。◇

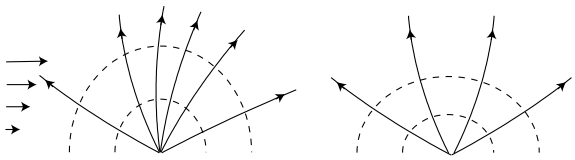

図 D.3: 音の伝播。左：風の影響。右：温度の影響（昼間）

問題 D.3 風上と風下
音は風上では聞こえにくい。これを図 D.3 左を参考にして説明しなさい。

D.1.5　ドップラー効果

サイレンを鳴らして走る車の音の高さは近付いて来るときは高く，遠ざかるときは低く聞こえる。この現象は，1842 年ドップラー[3]が定式化したので**ドップラー効果** (Doppler effect) と呼ばれる。

[3]Johann Christian Doppler (ドイツ,1803-1853) 1842 年，二重星の光の色の変化などに気づき，この効果の存在に気がついた。音のドップラー効果については，馬車に乗った人が楽器を奏で，絶対音感に優れた人に地上でその音の高さの違いを聞き分けてもらって，実験的に関係式を求めた。

例題 D.7 音源が動いているときのドップラー効果
振動数 ν[Hz] の音を発生する音源が速さ v_s[m/s] で観測者の方向に動いているとき，観測者の聞く振動数 ν'[Hz] は

$$\nu' = \frac{v}{v - v_s}\nu \text{ [Hz]} \tag{D.13}$$

となることを示しなさい。ここで v $(v > v_s)$ [m/s] は音速である。

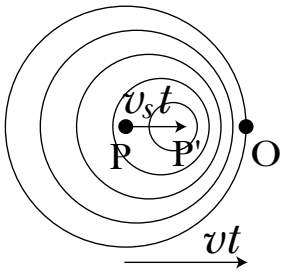

図 D.4: 音源が動いているときのドップラー効果

[解] ある瞬間に P の位置で出た音が，t 秒後に観測者 O に届いたとしよう。t 秒後には音源は P から vt[m] だけ観測者に近付いた点 P' にいる (図 D.4)。OP' 間に含まれている波の数は，音源が静止しているときに t 秒間に出す波の数に等しい。音源が静止しているときの波長を λ[m]，動いているとき観測者が観測する波長を λ'[m] とすると

$$\frac{(v - v_s)t}{\lambda'} = \frac{vt}{\lambda} \tag{D.14}$$

音速は変わらないので，$\nu'\lambda' = \nu\lambda = v$ [m/s] より，(D.13) が得られる。◇

例題 D.8 観測者も動いているときのドップラー効果
例題 D.7 の場合に加えて, 観測者も v_o[m/s] の速度で同じ方向に動いているとき, 観測者が聞く振動数 ν''[Hz] は

$$\nu'' = \frac{v - v_o}{v - v_s}\nu \text{ [Hz]} \tag{D.15}$$

で与えられることを示しなさい。

[解] 観測者には，音源での波長が λ'[m] であり，また，音速が $v - v_o$ [m] であるように観測される。したがって観測者が観測する振動数 ν''[Hz] は次式で与えられる。$\nu'' = (v - v_o)/\lambda'$ [Hz] に (D.14) を代入して次式を得る。

$$\nu'' = \frac{(v - v_o)}{\lambda'} = \frac{v - v_o}{v - v_s}\nu \text{ [Hz]} \tag{D.16}$$

もちろん，音源や観測者の運動が逆向きのときは，(D.16) で V_s や V_o の符号が逆になる。◇

風の効果，光のドップラー効果等

風速 v_w[m/s] の風が吹いているときには，音速が $v + v_w$ [m/s] であるとして計算すればよい。また，音源の動く方向が観測者に対して θ の角度をなすとき，(D.13) は

$$\nu' = \frac{v}{v - v_s \cos\theta}\nu \text{ [Hz]} \tag{D.17}$$

のように変形される。

光にもドップラー効果があり，光源が近付いているときには短波長側にずれ (青方偏移: blue shift)，遠ざかるときには長波長側にずれる (赤方偏移: red shift)。しかし，光のときは相対論的に取り扱う必要がある (問題 F.15 参照)。

D.1.6　衝撃波

波源の動く速さ v_s[m] が音速 v[m] を超える ($v_s > v$) ときは，(D.13) はもちろん意味をなさない。この場合には，**衝撃波** (shock wave, sonic boon) が発生する。ジェット機の通過により, 窓ガラスが割れたり家が震動したりすることはよく知られている。

音源の速度と音速との比を**マッハ**[4]**数** (Mach number) と呼ぶ。衝撃波の進行方向がジェット機等の運動方向と成す角度は，マッハ数によって決まる。

例題 D.9 衝撃波の方向
マッハ数 M のジェット機のつくる衝撃波は, ジェット機の運動方向に対し,

$$\cos\theta = \frac{1}{M} \tag{D.18}$$

の方向に放出されることを示しなさい。

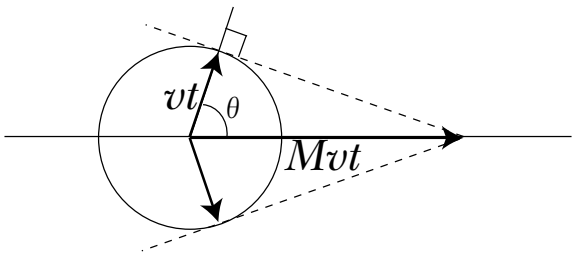

図 D.5: マッハ数 M の衝撃波

[解] 図 D.5 に示すように, ホイヘンスの原理により，(D.18) の方向に放出される。◇

光の場合の衝撃波に相当するのが，チェレンコフ (Cherenkov) 光である。荷電粒子 (速さ v[m/s]) が，物質中 (屈折率 n) の光速 (c/n[m/s]，c は真空中の光速) を超えて通過する場合に発生する。チェレンコフ光は入射粒子の方向に対して，角度 θ(式 (D.19)) を頂角とする円錐の方向に放射される。

$$\cos\theta = \frac{c}{nv} \tag{D.19}$$

[4]Ernst Mach(オーストリア,1838-1916) 「マッハの原理」の提唱により，相対論形成にも大きな影響を与えた。

荷電粒子が物質中を通過すると，原子の偏極 (電子雲のずれ) が起こる。もとに戻るとき，位相が揃う方向に光が伝播する。ホイヘンスの原理により，その方向は (D.19) を満たす方向に放出される。

D.1.7　超音波

人間の耳に聞こえない高い振動数 (通常 10 kHz 以上) の音を**超音波** (ultrasonic wave) という。超音波は，現在では高い振動数の各種の弾性波の総称として用いられる。

超音波は振動数が高いため，エネルギーを大きくできる。また波長が短いため透過力も強く，ビーム状にしたり，小さな部分に集中させたり，短いパルスを作ったりできる。このような性質を利用していろいろな目的に使われている。たとえば，超音波加工，超音波溶接，超音波洗浄，超音波探傷 (非破壊検査)，艦船探知，ソナー (sonar: sound navigation and ranging)，音響測深機，魚群探知器，医療診断等に活躍している。身近なところでは，胃の検査や胎児像影などでおなじみであろう。こうもりやイルカは超音波を用いて障害物や獲物までの位置や動きを察知していることで知られる。

例題 D.10 球速の測定
ネット裏からスピードガンを用いて，投手の投げたボールの球速を測定する。超音波の振動数を ν[Hz]，反射波の振動数を ν'，音速を v[m/s] とするとき，球速を求める式を導きなさい。ただし超音波はボールと正面衝突するものとする。

[解]　ドップラー効果により，球速を測定する。球速を u[m/s] とするとき，ボールが感じる振動数は，(D.15) より

$$\nu_b = \frac{v+u}{v}\nu \ [\mathrm{Hz}] \tag{D.20}$$

となる。反射音は，ボールを音源とみなして，ν_b の振動数で速度 u で動いていると考える。よって反射音の振動数 ν' は

$$\nu' = \frac{v}{v-u}\nu_b = \frac{v+u}{v-u}\nu \ [\mathrm{Hz}] \tag{D.21}$$

となる。したがって

$$u = \frac{\nu'-\nu}{\nu'+\nu}v \ [\mathrm{m/s}] \tag{D.22}$$

を得る。球速は時速で測られるので，(D.22) で得た値を 3600 倍する。◇

D.2　光

本節では，光を光線と考えて，鏡やレンズの公式を導こう。また，光の分散 (虹のできる理由)，干渉，回折について学ぼう。

D.2.1　幾何光学

光を光線と考えて，道筋を幾何学的に求める方法，幾何光学について学ぼう。幾何光学を用いることにより，鏡やレンズなどでの反射や屈折の基本的なことがらを理解できる。

フェルマの原理

幾何光学の基本になるのは**フェルマ**[5]**の原理** (Fermert's principle) である。フェルマの原理によると，光線は，所要時間が最小になる道筋を通る。

屈折率 n の物質中の光速 c'[m/s] は，$c' = c/n$ [m/s] である。屈折率 n の物質中を光が距離 ℓ[m] だけ進む時間は，$\ell/c' = n\ell/c$ [s] となる。この $n\ell$[m] を光学距離 (光路長: optical distance) という。すなわち

$$\text{光学距離} = \text{屈折率} \times \text{光の伝播距離} \tag{D.23}$$

これを用いるとフェルマの原理は次のように言い換えることができる。

フェルマの原理 光線は光学距離 (所要時間) を最小にする道筋をとる。

反射，屈折の法則

フェルマの原理を用いて，反射，屈折の法則を導こう。

例題 D.11 フェルマの原理による反射の法則の導出
フェルマの原理から反射の法則を導け。

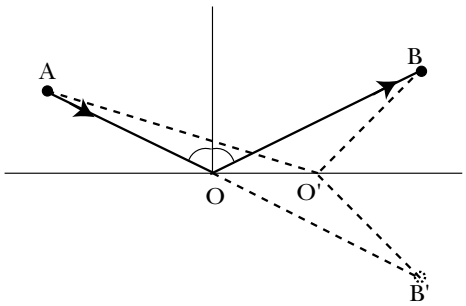

図 D.6: フェルマの原理と反射の法則

[解] 点 A から点 B に行く最短距離を考える (図 D.6)。点 B の境界面に対する鏡像点を B' とし，AB' と境界面の交点を O としよう。AO+OB=AB' であり，O 以外の点 O' を通る道筋は AO'+O'B>AB' であるから，AOB が求める最短の道筋である。このとき入射角と反射角は等しい。ただし，入射角 (反射角) とは入射光線 (反射光線) が境界面の法線となす角である。◇

例題 D.12 フェルマの原理による屈折の法則の導出
フェルマの原理から屈折の法則を導け。

[5] Pierre de Fermat(フランス，1601-1665) 古代の Diophantos の「算術論」の余白に書き記した $x^n + y^n = z^n$ の整数解に関するフェルマの定理で有名。

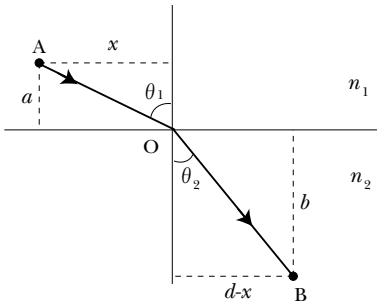

図 D.7: フェルマの原理と屈折の法則

[解] 点 A から点 B に行く光学距離を最小にすればよい。境界面上の点 O を通るとすれば，点 O は点 A と B と同一平面上にある。その面内で図 D.7 のように距離を定義することにしよう。AOB の光学距離 ℓ[m] は

$$\ell = n_1\sqrt{x^2+a^2} + n_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}\ [\mathrm{m}] \tag{D.24}$$

ℓ を最小にするには，$d\ell/dx = 0$ となるように x を決めればよい。

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}n_1 = \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}n_2 \tag{D.25}$$

これは入射角を θ_1，反射角を θ_2 とするとスネルの屈折の法則が導かれる。◇

球面鏡

幾何光学により，球面鏡による反射を考えよう。ここでは反射角が十分小さい場合を考える。すなわち，角度を θ とすると，$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$ の近似が成り立つ角度の光線である。このような光線を**近軸光線** (paraxial ray) という。

凹面鏡 凹面鏡 (concave mirror) による反射について考えよう。

例題 D.13 凹面鏡での光源の位置と像の位置の間の関係式
図 D.8 のように座標と点，角度を定義する。凹面鏡の中心軸 (光軸) 上の点 A に光源を置くとき

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} \equiv \frac{1}{f}\ [\mathrm{m}^{-1}] \tag{D.26}$$

が成り立つことを示しなさい。ただし，OA=a [m]，OB=b [m]，OC=R [m] である。

[解] 近軸光線の仮定から $\alpha \simeq \tan\alpha$ 等が成り立つので

$$a\alpha = b\beta = R\gamma\ [\mathrm{m}] \tag{D.27}$$

また三角形の角度の関係から

$$\gamma - \alpha = \beta - \gamma = \theta \tag{D.28}$$

(D.27) に (D.28) を代入して (D.26) を得る。A から出た光線は全て B に集まる。点 B を A の**実像** (real image) という。とくに $a = \infty$ すなわち，光軸に平行な平行光線が入射すると，

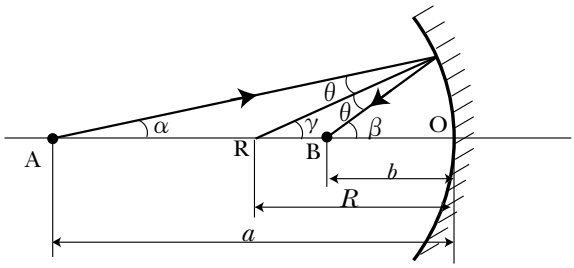

図 D.8: 凹面鏡での光源と像の位置関係

F の位置に集まる。F を**焦点** (focus) と言い，f を**焦点距離** (focal length) という。逆に F から出た光は平行光線となる。(D.26) で $a < R/2$ のとき b は負になる。すなわち鏡の後ろに像があるように見える。この像のことを**虚像** (virtual image) という。◇

例題 D.14 凹面鏡による像の作図
凹面鏡の前に物体を置いたときにできる像を作図しなさい。

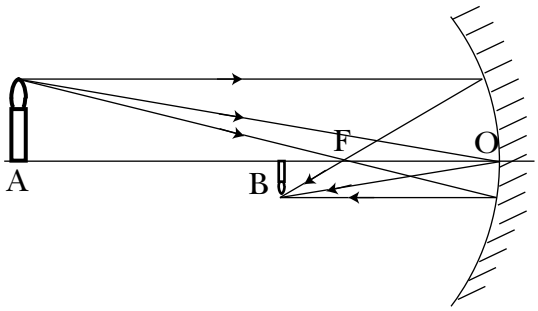

図 D.9: 凹レンズによる像の作図

[解] 図 D.9 のように平行光線は焦点を通り，逆に焦点を通る光線は平行光線になる性質を利用して作図する。◇

問題 D.4 スプーンに映る顔
　スプーンの凹面を見ると，自分の顔が逆さに映っている。理由を説明しなさい。⋈

問題 D.5 浮かぶ物体
　「そこに見えるのにさわっても見ても何もない」というおもちゃがある。原理を説明しなさい。⋈

凸面鏡 凸面鏡 (convex mirror) についても全く同様に考えることができる。

例題 D.15 凸面鏡での光源の位置と像の位置の間の関係式
距離の符号を，鏡の表側を正，裏側を負とすることにより，凸面鏡においても (D.26) が成り立つことを示しなさい。

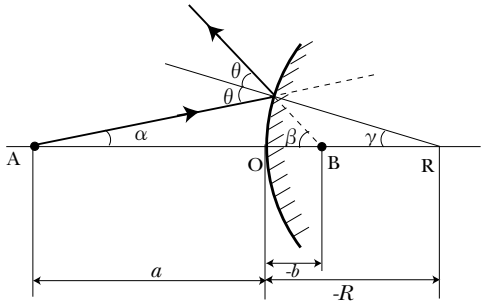

図 D.10: 凸面鏡での光源の位置と像の位置の間の関係式

[解] OA= $a > 0$，OB= $b < 0$，OC= $R < 0$ としよう (図 D.10)。例題 3.6 と同様

$$a\alpha = -b\beta = -R\gamma \text{ [m]} \tag{D.29}$$

また角度の関係式は

$$\alpha + \gamma = \beta - \gamma = \theta \tag{D.30}$$

(D.29) に (D.30) を代入して，(D.26) を得る ($f = R/2 < 0$)。◇

凸，凹面鏡における光源と像の位置の公式における距離の符号の約束 ここで，凸，凹面鏡における光源の距離 (a[m])，像の距離 (b[m])，半径 (R[m])，焦点距離 (f[m]) の符号の約束について復習しておこう。

> 凸，凹面鏡における距離の符号の約束：光源，像，球面の中心が，鏡の表側にあるとき距離の符号を正とし，裏側にあるときを負とする。

近軸光線に対しては，$f = R/2$ [m] なので，凹面鏡では $f > 0$，凸面鏡では $f < 0$ である。

レンズ

眼鏡や望遠鏡などで活躍するレンズについて考察しよう。

球面による屈折 まず球面での屈折について考えよう。屈折の場合，鏡の場合とは異なる距離の符号を用いるのが慣例である。すなわち，レンズの場合，レンズに対して光源側と反対側に像ができる場合，像とレンズとの距離を正とする。

> **例題 D.16** 球面での屈折
> 境界面が球面を成す媒質での屈折において，光源の位置と像の位置との間に次の関係式が成り立つことを示しなさい。
>
> $$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} \text{ [m}^{-1}\text{] (球面での屈折)} \tag{D.31}$$

[解] 図 D.11 の場合

$$a\alpha = b\beta = R\gamma \text{ [m}^{-1}\text{]} \tag{D.32}$$

$a > 0$，$b > 0$，$R > 0$ である。また

$$\theta_1 = \alpha + \gamma,\ \theta_2 = \gamma - \beta,\ \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{D.33}$$

(D.32) に式 (D.33) を代入して (D.31) を得る。◇

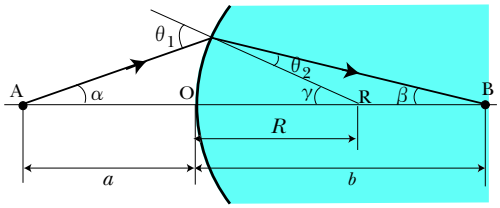

図 D.11: 球面での屈折

薄いレンズ (D.31) を利用して，薄いレンズの場合に成り立つ光源と像の関係式を導くことができる。

例題 D.17 薄いレンズによる光源の位置と像の位置の関係式
図 D.12 のように光軸上の点 A の像が点 B にできるとき，OA $= a > 0$，OB$= b > 0$ として

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}\ [\mathrm{m}^{-1}] \tag{D.34}$$

が成り立つことを示しなさい。ただし f[m] は焦点距離である ($f > 0$：凸レンズ，$f < 0$：凹レンズ)。

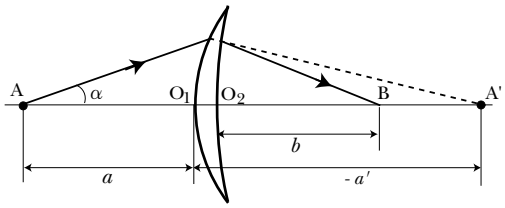

図 D.12: 薄いレンズによる像

[解] 屈折率 n のレンズを考えよう。最初の球面による A の像を A' とし，(D.31) において $n_1 = 1$，$n_2 = n$ とおく。ここで OA'$= a' > 0$ である。

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{a'} = \frac{n-1}{R_1}\ [\mathrm{m}^{-1}] \tag{D.35}$$

次に A' を新しい光源とみなし，後ろの球面による屈折を考える。薄いレンズでは O_1 と O_2 が一致すると考えて，光源は右側にあるから負符号をつけて

$$-\frac{n}{a'} + \frac{1}{b} = \frac{1-n}{R_2}\ [\mathrm{m}^{-1}] \tag{D.36}$$

を得る。(D.35) と (D.36) を辺々加えて

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\equiv\frac{1}{f}\ [\mathrm{m}^{-1}] \tag{D.37}$$

$a=\infty$ のとき，すなわち平行光線は $b=f$ に集まる。$f[\mathrm{m}]$ は焦点距離である。◇

問題 D.6 焦点距離の符号
凸レンズの場合は $f>0$，凹レンズの場合は $f<0$ であることを示しなさい。⋈

レンズにおける a,b,f の符号の約束：通常は $a>0$ とする (特殊な場合は $a<0$，例えば (D.36) のようなとき)。また，像がレンズに対して光源の反対側にあるとき (実像を結ぶとき)$b>0$ とし，同じ側にあるとき $b<0$ とする。焦点距離に関しては，凸レンズの場合は $f>0$，凹レンズの場合は $f<0$ である。

問題 D.7 凸レンズにおけ像の作図
焦点距離 f の凸レンズにおいて，$a>f$，$a<f$ の場合に像の位置を作図で求め，レンズの公式が成り立っていること，また，像の大きさは $|b/a|$ であることを確かめなさい。⋈

問題 D.8 泡レンズ
水中の泡 (球形) に平行光線が入射したとき，光線は収束するか，発散するか。⋈

***収差** 近軸光線では，平行光線は焦点に集まる。しかし，$\sin\theta\simeq\tan\theta\simeq\theta$ が成り立たない領域では 1 点に集まらない。これを**球面収差** (spherical abberation) という。波長が一定のときに生ずる収差について，1856 年ザイデル[6] が詳しく考察した (表 D.2)。それ以外に昔から知られている色収差がある。ニュートンは，レンズでは本質的に色収差は消せないと考え，反射望遠鏡を開発した。しかし後に，屈折率の異なるレンズを組み合わせることにより色収差が補正できることなどが発見された。

表 D.2: 収差の種類と意味

収差	意味
球面収差	近軸光線近似の破れによる収差
コマ収差	斜めに入射した光が 1 点に集まらず彗星の尾 (coma) のようになる収差
非点収差	光軸外からの点からの像がぼける (上の二つを補正後でも)
波面収差	1 点から出た光の波面の球面からのずれ
像面湾曲	点は点になるが，光軸から離れるほどピントがずれる
歪曲	被写体の点の像は点になるが，像が歪曲する
色収差	波長 (色) によって集まる点が異なる収差

***度数** 焦点距離をメートル (m) で表し，その逆数を度数またはジオプター (diopter) (発音はダイオプター) という。度数の絶対値が大きいほど屈折率が大きい。

[6] L. von Zeidel(ドイツ,1821-1896)

問題 D.9 眼の働き

図 D.13 は人間の眼の模式図である。角膜，水晶体，硝子体のうち，光をもっとも屈折している部位はどれか。また近眼，遠視，老眼について説明しなさい。⋈

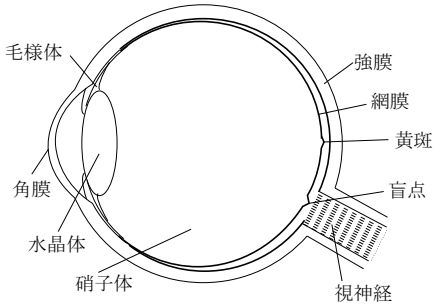

図 D.13: 眼の模式図

問題 D.10 射出説

昔，眼でものが見える理由として，こうもりが超音波を出すように,「眼から何かを出してその反射を見ている」と考えられたこともあった。なぜこの説が誤りなのか，眼の構造を知らず，また，眼から出るものを測定器等で測定しないとして答えなさい。⋈

問題 D.11 コンタクトレンズと乱視

コンタクトレンズでは，一般には乱視の補正の必要がないのはなぜか。⋈

問題 D.12 水中の景色

水中で物を見ようと思ってもよく見えないのはなぜか。また水中眼鏡を用いるとよく見えるのはなぜか。⋈

D.2.2　プリズムと光の分散

誰しもプリズムで虹 (rainbow) をつくって遊んだ記憶があるだろう。プリズムによる光の屈折と分散 (dispersion) について考察しよう。

プリズム

平行な 2 つの面をもつガラス板に斜めに入射した光線は，入射面で屈折を受ける。しかし裏面で再び屈折されて，もとの光線と平行に出ていく。2 つの面が平行でない透明な物質をプリズム (prism) という。

例題 D.18 プリズムによるふれの角

小さな頂角をもつプリズムに小さな入射角で入射した光線のふれ角は，入射角によらず一定であることを示しなさい。

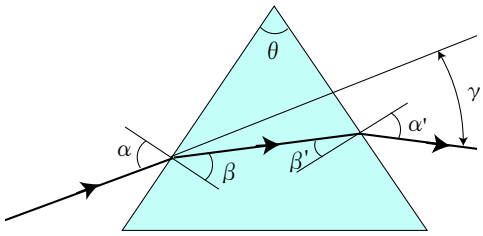

図 D.14: プリズムによるふれの角

[解] 図 D.14 のように角度を定義する。プリズムの屈折率を n とすると

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \simeq \frac{\alpha}{\beta},\ n = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} \simeq \frac{\alpha'}{\beta'} \tag{D.38}$$

すなわち

$$\alpha = \beta n,\ \alpha' = \beta' n \tag{D.39}$$

ふれ角 γ は

$$\gamma = (\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta') \tag{D.40}$$

(D.39) を代入すると，$\theta = \beta + \beta'$ より次式を得る。

$$\gamma = (n-1)\theta = \text{一定} \tag{D.41}$$

◇

全反射 屈折の公式において，$n_1 > n_2$ で，しかも入射角が大きくて

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 > 1 \tag{D.42}$$

となるとき，境界面で全反射がおこる。たとえばプリズムを図 D.15 のように用いると，光の損失がほとんどなく光の方向を変えることができる。

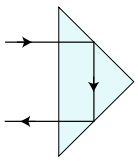

図 D.15: プリズムでの全反射

光の分散 プリズムによる光の分散について考察しよう。

例題 D.19 プリズムによる光の分散
プリズムによって，白色光が 7 色の虹に分かれる (分散) 理由を説明しなさい。

[解] 屈折率は波長に依存し，可視光では波長が短いほど屈折率が大きい。したがってふれ角も大きい。生成されたスペクトル (spectrum) は連続的であるが，人間はそれを 7 色[7]に分けて知覚する。◇

問題 D.13 虹
雨上がりの空や滝に虹がかかる。その理由，および，その外側に薄くできる副虹について説明しなさい。⋈

問題 D.14 逆さ虹 (環天頂アーク)
ごく稀に太陽の上に逆さ虹がかかることがある。太陽が地平線にある場合，太陽の上約 58° の角度に見える。これは風のない穏やかな日に六角柱状の氷晶によってできるという。その機構について説明しなさい。⋈

表 D.3: 色と波長

波長 (μm)	- 0.38 -	0.40 -	0.43 -	0.49 -	0.55 -	0.59 -	0.64 -	0.77 -	
色	紫外	紫	藍	青	緑	黄	橙	赤	赤外

D.2.3 光の干渉

光は波であるから干渉や回折を起こす。しかし波長が短いため，長い間それに気づかれなかった。1807 年ヤング (Young) が二重スリットで干渉縞ができることを示して，光が波の性質をもつことが決定づけられた。

干渉

まず光の干渉について考察しよう。

二重スリットによる干渉 二重スリットによる光の干渉について考えよう。

> **例題 D.20** ヤングの実験
> 二重スリットに垂直に平行光線が入射したとき，スクリーンに現れる明線の位置を求めなさい (図 D.16)。

[解] r_1 と r_2 の差が波長の整数倍である場合に明線となる。

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \left(L^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2} \simeq L + \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{2L} \ [\mathrm{m}] \\
r_2 &= \left(L^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2} \simeq L + \frac{(x + \frac{a}{2})^2}{2L} \ [\mathrm{m}]
\end{aligned}
\tag{D.43}
$$

[7]波長の長い順から赤，橙，黄色，緑，青，藍，紫の 7 色である (表 D.3)。(しかし，虹が 7 色というのは世界共通の認識ではない。たとえばアメリカでは，藍を除いて 6 色と数えられる。

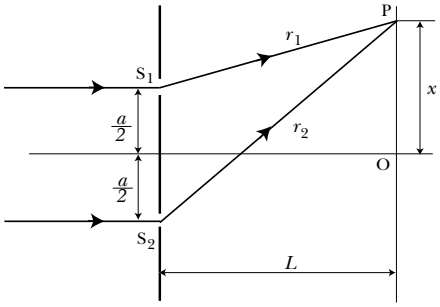

図 D.16: ヤングの二重スリットによる干渉実験

$$r_2 - r_1 \simeq \frac{ax}{L} \text{ [m]} \tag{D.44}$$

すなわち明線は

$$\frac{ax}{L} = m\lambda \text{ [m]}, \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{D.45}$$

のとき現れる。すなわち，$x = m\lambda L/a$ [m] のとき明線が現れる。◇

問題 D.15 フレネルの複プリズム

図 D.17 のように頂角が 180 °にきわめて近いプリズム (フレネルの複プリズム) を用いると，ヤングの干渉実験と同様に干渉縞が観測される。ヤングの実験と対応させて説明しなさい。⋈

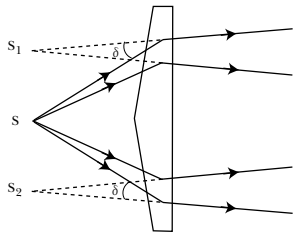

図 D.17: フレネルの複プリズム

薄膜による干渉 しゃぼん玉や水面の油膜は色づいて見える。これは薄膜の両面で反射した光の干渉による。

例題 D.21 薄膜による干渉の条件

厚さ d[m]，屈折率 n の薄膜に，屈折角が β をなすように入射した波長 λ[m] の光の強め合う条件は

$$2nd\cos\beta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \text{ [m]}, \ (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{D.46}$$

で与えられることを示しなさい。

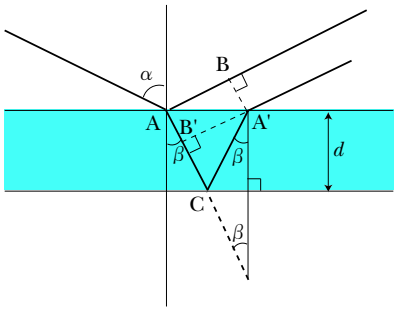

図 D.18: 薄膜による干渉

[解] 図 D.18 のように点や角度を定義する。光の反射において，屈折率の小さい物質から大きい物質への境界面 (固定端に相当) では位相が π ずれる (1.3 節)。すなわち半波長 $\lambda/2$ だけずれる。逆の場合はずれない。したがって 2 つの反射波の光路差 $\Delta\ell$ は

$$\begin{aligned}\Delta\ell &= n(\mathrm{AC}+\mathrm{CA'})-\mathrm{AB}+\frac{\lambda}{2}\ [\mathrm{m}]\\ &= n(\mathrm{AC}+\mathrm{CA'}-\mathrm{AB'})+\frac{\lambda}{2}=2nd\cos\beta+\frac{\lambda}{2}\ [\mathrm{m}]\end{aligned} \tag{D.47}$$

この距離が波長の整数倍のとき強め合う。したがって (D.46) を得る。(D.46) の条件が波長に依存しているので，透明な薄膜は色づいて見える。◇

薄い隙間での干渉 ガラス等を細い隙間を空けて置いた場合の干渉について考えよう。とくに，ニュートンリングについて考察しよう。

例題 D.22 ニュートンリング
平らなガラスの上に平凸レンズを凸部を下にして置くと，縞模様が見える。凸レンズの球面半径を R[m] とするとき，波長 λ[m] の垂直入射の光による明るいリングの半径を求めなさい。

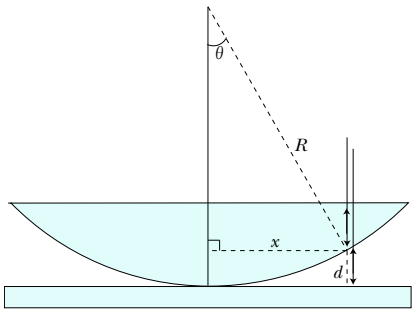

図 D.19: ニュートンリング

[解] 中心から半径 x[m] の距離でのすきまを d[m] とし，角度 θ を図 D.19 のようにとる。

$$R\sin\theta = x\ [\mathrm{m}],\ R(1-\cos\theta)=d\ [\mathrm{m}] \tag{D.48}$$

$\theta \ll 1$ とすると

$$d \simeq \frac{R}{2}\theta^2 \simeq \frac{x^2}{2R}\ [\mathrm{m}] \tag{D.49}$$

(D.49) より，明線は次式を満たす場所に現れる。

$$\frac{x^2}{R} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda\ [\mathrm{m}],\ (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{D.50}$$

x を求めると

$$x = \sqrt{(m + \frac{1}{2})R\lambda}\ [\mathrm{m}],\ (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{D.51}$$

(D.51) を満たす半径のところに明るいリングができる。◇

ニュートンリングを利用して，レンズの曲率半径を計ったり，表面の平面性を調べることができる。

例題 D.23 反射防止膜
物質 (屈折率 n_2) の表面に薄い膜 (屈折率 n_1; $n_1 < n_2$) をコーティングすることによって物質の表面での反射をなくすことができる。垂直入射の光に対して薄膜の厚さを求めなさい。

[解] 反射を防止するには，薄膜の両面からの反射光が干渉により打ち消しあうようにすればよい。空気中から入射するので，薄い膜の二つの面とも位相が π ずれる。厚さを d[m] とすると，2 つの面での反射光が弱め合う条件は，垂直入射のとき ((D.47))

$$2n_1 d = (m + \frac{1}{2})\lambda\ [\mathrm{m}],\ (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{D.52}$$

$m = 0$ のとき膜厚は最小なので，厚さを次のように選べばよい。

$$d = \frac{\lambda}{4n_1}\ [\mathrm{m}] \tag{D.53}$$

◇

D.2.4　光の回折

光は波であるから回折を起こす。ここでは，**フラウンホーファー**[8]**回折** (Fraunhofer diffraction)，すなわち，無限遠に置いたスクリーンに平行光線が作る回折パターンについて考えよう。これに対して光源やスクリーンが有限の位置にある場合の回折を**フレネル**[9]**回折** (Fresnel diffraction) という。フラウンホーファー回折では，実際には凸レンズを用いることによってスクリーン等の位置を有限の位置に置くことができる。

[8] Joseph Fraunhofer(ドイツ，1787-1825) スペクトルの輝線，太陽スペクトルの 600 本の暗線の発見で有名。

[9] Augustin J. Fresnel(フランス，1788-1827) 偏光の干渉などから光は横波であることなど，光の波動説の確立とその性質の解明に貢献した。

スリット

スリットによる回折を考えよう。

例題 D.24 スリットによるフラウンホーファー回折
波長 λ[m] の平行光線が幅 a[m] の狭いスリットに垂直入射した場合のフラウンホーファー回折について，暗線が現れる方向を求めなさい。

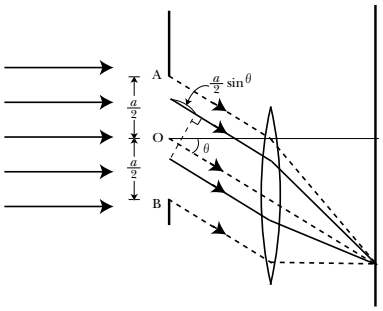

図 D.20: スリットによるフラウンホーファー回折

[解] 角度 θ 方向へ進む光線を考えよう (図 D.20)。中心 O から出た光と端 A から出た光の光路差は $\frac{a}{2}\sin\theta$ [m] である。この光路差が半波長に等しいとき，O からの光と A からの光は打ち消し合う。この場合，下半分の任意の点 D から出た光と D の $a/2$[m] だけ上の点 C から出た光も打ち消し合う。すなわち，OA 上から出た光と OB 上から出た光は互いに打ち消しあって，その方向には暗い線が現れる。同様に AB 間を $2n$ 等分して，角度 θ_n の方向に暗線が現れる条件は

$$\frac{a}{2n}\sin\theta_n = \frac{\lambda}{2}\ [\mathrm{m}] \tag{D.54}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$ の方向に暗線が現れる。◇

例題 D.25 スリットによるフラウンホーファー回折の強度分布
例題 3.17 において，角度 θ 方向の光の強度 $I(\theta)$ を求めなさい。

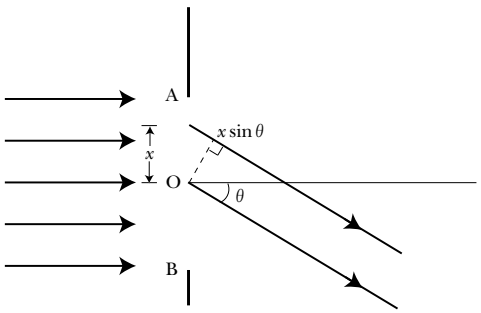

図 D.21: スリットによるフラウンホーファー回折

[解] スクリーン上の点を P とし，OP が入射光となす角を θ としよう (図 D.21)。スリットを通って P に到達した光を $E_0 \sin(kR - \omega t)$，$k \equiv 2\pi/\lambda$ [m^{-1}] としよう。O から x だけ上の，幅 dx の微小部分から P に到達する光は

$$\frac{E_0 dx}{a} \sin\left(k(R + x\sin\theta) - \omega t\right) \tag{D.55}$$

AB 上から出る光は，(D.55) を $-a/2$ から $a/2$ まで積分して得られる。

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \frac{E_0}{a} \sin\left((kR - \omega t) + (k\sin\theta)x\right) = E_0 \left(\frac{\sin(\frac{ka\sin\theta}{2})}{(\frac{ka\sin\theta}{2})} \right) \sin(kR - \omega t) \tag{D.56}$$

点 P での回折光の強度は，振幅を 2 乗して

$$I(\theta) = E_0^2 \left(\frac{\sin(\frac{ka\sin\theta}{2})}{\frac{ka\sin\theta}{2}} \right)^2 \tag{D.57}$$

分布は図 D.22 のようになり，$I(\theta) = 0$ になる角度は $\sin(\frac{ka}{2}\sin\theta) = 0$，すなわち

$$\frac{a}{\lambda}\sin\theta_n = n \tag{D.58}$$

となって (D.54) と一致する。◇

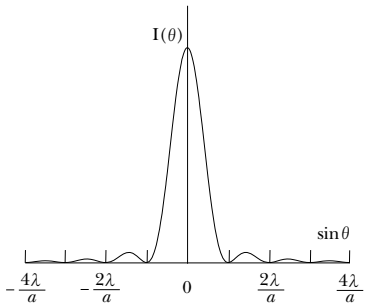

図 D.22: スリットによるフラウンホーファー回折による強度分布

今はスリットを考えたが，逆にスリットの代わりに幅 a[m] の障害物を置いた場合の強度分布は $E_0^2 - I(\theta)$ となり，明暗のパターンが逆になる。

回折格子

スリットを等間隔で並べたものを**回折格子** (diffraction grating) といい，スリットの間隔を**格子定数** (grating constant) という。スリットの幅を a[m]，格子定数を b[m]，スリットの総数が N のとき，θ 方向の回折光の強さ $I_N(\theta)$ は次式で与えられる。

$$I_N(\theta) = I(\theta)F(\theta),\ F(\theta) = \frac{\sin(\frac{Nkb\sin\theta}{2})}{\sin(\frac{kb\sin\theta}{2})} \tag{D.59}$$

$F(\theta)$ を**干渉因子** (interference factor)，$I(\theta)/E_0^2$ を**回折因子** (diffraction factor) という (図 D.23)。

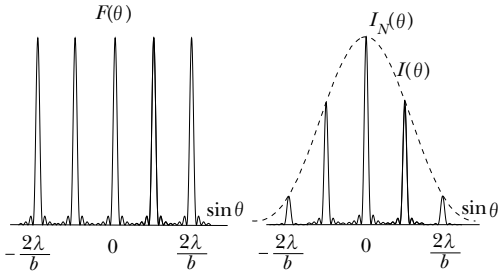

図 D.23: 回折格子によるフラウンホーファー回折

例題 D.26 回折格子による光の強度分布
回折格子について，(D.59) を導きなさい。

[解] n 番目のスリットによる回折光の式は

$$\begin{aligned} E_n &= \sqrt{I(\theta)}\sin\left(k(R+(n-1)b\sin\theta)-\omega t\right) \\ &\equiv \sqrt{I(\theta)}\sin\left(2(n-1)\alpha+\beta\right) \end{aligned} \tag{D.60}$$

ここで，$\alpha = \frac{kb\sin\theta}{2}$，$\beta = kR - \omega t$ と置いた。全スリットからの寄与を足し合わせると

$$F = \sqrt{I(\theta)}\sum_{n=1}^{N}\sin(2(n-1)\alpha+\beta) \tag{D.61}$$

この計算は $\sin\alpha$ を掛けて加法定理を使うことによって計算できる。

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt{I(\theta)}}{\sin\alpha}\sum_{n=1}^{N}\sin(2(n-1)\alpha+\beta)\sin\alpha \\ &= \frac{\sqrt{I(\theta)}}{2\sin\alpha}\sum_{n=1}^{N}\left(\cos(\alpha(2n-3)+\beta)-\cos\left(\alpha(2n-1)+\beta\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{I(\theta)}}{2\sin\alpha}\left(\cos(-\alpha+\beta)-\cos((2N-1)\alpha+\beta)\right) \\ &= \sqrt{I(\theta)}\frac{\sin(N\alpha)}{\sin\alpha}\sin((N-1)\alpha+\beta) \end{aligned} \tag{D.62}$$

(D.62) の振幅部分を 2 乗して，(D.59) が得られる。◇

分解能

望遠鏡の倍率を上げていくと，やがて像がぼけてしまい，それ以上倍率を上げても細部がよく見えないという限界に達する。収差などとは異なり，補正できない原理的な限界である。これは光の回折による。

望遠鏡では口径に入った光を観察している。例題 3.18 では一次元 (スリット) の場合の回折を考え，図 D.22 のような光の強度分布を得た。望遠鏡では口径の大きさと等しい丸い穴

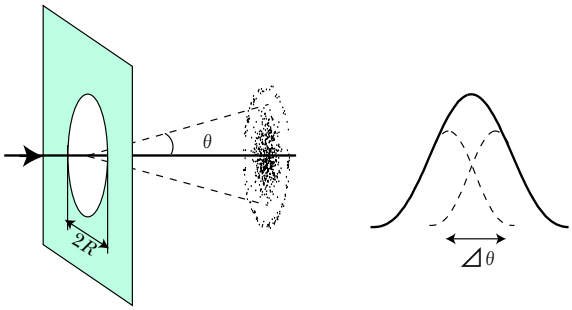

図 D.24: 望遠鏡の分解能

による回折像を見ていることになる。その分布は第 1 次のベッセル関数となる。半径 R[m] の穴による平行光線の回折像は，波長を λ[m] とすると

$$R\sin\theta \simeq 0.61\lambda, 1.12\lambda, \cdots \ \text{[m]} \tag{D.63}$$

のところで暗リングとなる強度分布を持つ (図 D.24 左)。θ が小さいとき，中心部の明るい部分は $\Delta\theta \simeq 0.61\lambda/R$ の角度の広がりをもつ。2 つの点状の物体の視角が $\Delta\theta$ より小さいと 2 つの像は重なってしまい，分離することは難しい (図 D.24 右)。そこで像の分離可能な目安として $\Delta\theta$ を用いる。

$$\Delta\theta = \frac{0.61\lambda}{R} \ \text{(口径 } 2R\text{[m] の望遠鏡の角度分解能)} \tag{D.64}$$

望遠鏡の角度分解能は，口径が大きく，観測する波長が短いほど優れていることがわかる[10]。

例題 D.27 顕微鏡の分解能
顕微鏡による，試料面上の 2 点の分離可能な距離 (の目安) を求めなさい。ただし，対物レンズが試料上の一点に対して張る角度を 2α，光の波長を λ[m] とする (図 D.25)。

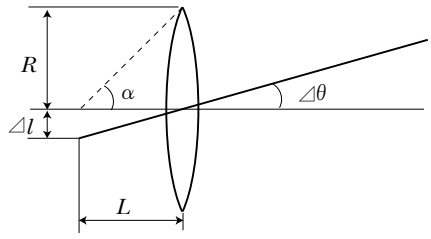

図 D.25: 顕微鏡の分解能

[解] 対物レンズの半径を R[m] とすると，分解能 (の目安) は (D.64) で与えられる。試料までの距離を L[m] とすると，分離可能な距離 $\Delta\ell$[m] は，$\Delta\ell = L\Delta\theta, L = R/\tan\alpha \simeq R/\sin\alpha$ だから

$$\Delta\ell \simeq \frac{0.61\lambda}{\sin\alpha} \ \text{[m]} \tag{D.65}$$

[10] この定義はあくまで定義 (目安) であって，これ以上分解能を上げられないという訳ではない。たとえば各々の光の強さが分かっていれば強度分布をフィットすることによってお互いの距離の情報を得ることができる。

対物レンズと試料の間に屈折率 n の媒質を満たすと次式となる。

$$\Delta\ell = \frac{0.61\lambda}{n\sin\alpha}\ [\mathrm{m}](\text{顕微鏡の分解能}) \tag{D.66}$$

◇

$n\sin\alpha$ を**開口数** (numerical aperture) という。分解能をよくするには開口数を大きくし，波長を小さくすればよいことがわかる。

***眼の分解能と視力** 分離して見える 2 点が眼と成す角度を最小視角という。それを分で表したとき，その逆数を視力という。最小視角が 1 分であれば視力は 1.0 である。視力の検査によく用いられるランドルト (Randolt) の標準マークは，外径 7.5 mm, 環の太さと切れ目の幅が 1.5mm である。これを 5m の距離に置くと切れ目は 1 分角となる (図 D.26)。人間の眼において，視力が高い角度範囲は黄斑部分の数分角程度である (図 D.13)。

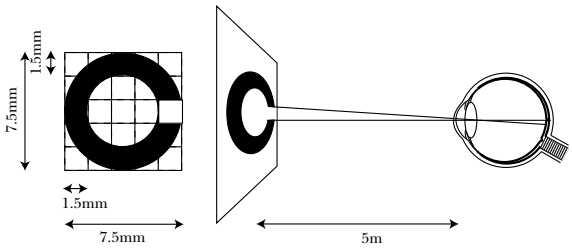

図 D.26: 眼の視力とランドルト環

問題 D.16 眼の分解能

眼の構造から決まる分解能を求めなさい。またそのときの網膜上の距離を求めなさい。ただし，瞳孔の直径を 3mm, 瞳孔から網膜までの距離を 17mm，光の波長を 600nm とする。⋈

付 録E　剛体の運動

ここでは，大きさを持つ物体の運動を考える。剛体とは，変形しない固い物体のことである。変形しないから，その運動は単純化されて，並進運動と回転運動だけを考えればよい。並進運動は質点の運動と同じなので，ここでは，回転運動を考える際に必要な慣性モーメントをまず学ぼう。その前に，重心の計算を復習しよう。

E.1　物体の重心

いままで**重心** (center of gravity) をきちんと定義せずに使ってきた。ここで定義しておこう。物体を N 個 $(i = 1, 2 \cdots, N)$ の微小部分に分けて考えよう。物体の重心 $\boldsymbol{r}_G = (x_G, y_G, z_G)$ は，i 番目の部分の質量を m_i，位置座標を $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ とすると，次のように定義される。

$$\boldsymbol{r}_G \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \text{ [m]} \tag{E.1}$$

各成分で書くと次のようになる。

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},\ y_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},\ z_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \text{ [m]}, \tag{E.2}$$

物体の重心を支えるとつり合うことを示そう。すなわち，重心の周りの重力のモーメントの和はゼロとなる。重量物をつり上げるクレーンなどでは，重心を通る鉛直線上にフックをもって来るようにワイヤーロープを掛けないと，重量物が振れて大変危険である。

例題 E.1 重心の周りの重力のモーメント
物体について，重心の周りの重力のモーメントの和はゼロであることを示しなさい。

[解] 物体を N 個の微小部分に区分けする。i 番目の微小部分の質量を m_i，位置を $\boldsymbol{r}_i$ とする。任意の点 $\boldsymbol{r}_0$ の周りの重力のモーメントは，重力を $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \sum_{i=1}^{N} m_i g(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0) \times \hat{\boldsymbol{z}} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i g \boldsymbol{r}_i\right) \times \hat{\boldsymbol{z}} - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i g \boldsymbol{r}_0\right) \times \hat{\boldsymbol{z}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i g(\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_0)\right) \times \hat{\boldsymbol{z}} \text{ [J]} \end{aligned} \tag{E.3}$$

ここで (E.1) を用いた。確かに，$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_G$ のとき $\boldsymbol{M} = 0$ である。◇

このことから，重力は物体の重心にはたらくとしてよい。ロープで物体をつるしたとき，もし重心がロープを通る鉛直線上に無いと，重力により物体は振り子運動をすることになる。

例題 E.2 やじろべえ
質量 m の 2 つの質点を軽い曲がった棒でつないで「**やじろべえ**」(図 E.1) を作ったとき，その重心の位置を求めなさい。

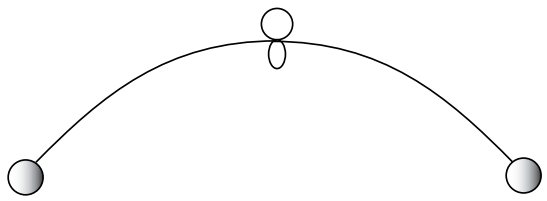

図 E.1: やじろべえ

[解] 2 つの質点を結んだ直線の中点にあることは明らかである。◇

このように重心は，物体の内側にあるとは限らない。図 E.1 の場合，支点は重心の上にあって，やじろべえは安定である。すなわち，やじろべえがどちらかに少し傾くと，重心にはたらく重力のモーメントは元に戻す向きにはたらく (復元力)。

物体は実際は連続であるから，重心を求める式は積分となる。$\Delta V_i \to 0$ の極限をとって積分に置き換えてやればよい。

$$\boldsymbol{r}_G = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\int \rho \boldsymbol{r} dV}{\int \rho dV} \text{ [m] (重心の定義式)} \tag{E.4}$$

ここで $m_i = \rho_i dV$ と置いた。$\rho_i = \frac{dm_i}{dV}$ は物体の密度であり，一様な物質では物体全体で一定値をもつが，一般的には位置の関数である。

E.2 剛体の運動

ここでは，大きさのある物体の運動について述べよう。話を簡単にするために，物体は固くて変形しないとする。このような物体を**剛体** (rigid body) という。剛体の運動は，並進と回転とに分けられる。これらを記述する運動方程式については，すでに学んだ。並進の運動方程式は (3.2)，回転の運動方程式は (7.11) で与えられる。

E.2.1 慣性モーメント

固定された軸 (**固定軸** (fixed axis)) の周りの回転を考えよう。このとき，慣性モーメントが定義でき，回転運動を記述する際に重要な役割をする。軸を z 軸とすると，回転の運動方程式は (7.11) の定義から次式で与えられる。

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \text{ [J] } (z \text{ 軸の周りの回転の運動方程式}) \tag{E.5}$$

剛体の L_z を求めよう。まず，軸の周りの回転角速度を ω，微小時間 Δt での回転角を $\Delta\varphi$ とすると，$\Delta\varphi = \omega\Delta t$ が成り立つ。すなわち，

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ [rad/s]} \tag{E.6}$$

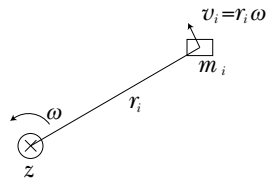

図 E.2: 微小部分の z 軸の周りの角運動量

である。

剛体を細かく区分けして i 番目の微小部分の質量を m_i とし，その速さを v_i とすると $v_i = r_i\omega$ であり，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ は直交するので，軸の周りの角運動量は，(7.9) の定義より $m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$ で与えられる (図 E.2)。ここで，r_i は微小部分と回転軸との距離である。剛体全体について和をとり角運動量 L_z を計算すると，全て同じ角速度 ω で回転しているので，

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega \equiv I\omega \ [\mathrm{J{\cdot}s}] \tag{E.7}$$

が得られる。ここで I を次式で定義し，**慣性モーメント** (moment of inertia) と呼ぶ。

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \ (\text{慣性モーメントの定義式}) \tag{E.8}$$

I は，剛体と固定軸を決めれば決まる定数である。すると，回転の運動方程式は (E.7) より，

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = M_z \ [\mathrm{J}] \tag{E.9}$$

と書ける。さらに回転角 φ を用いて，$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ より

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z \ [\mathrm{J}] \ (z \text{ 軸の周りの回転の運動方程式}) \tag{E.10}$$

式の形は，1 次元の質点の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \ [\mathrm{N}] \tag{E.11}$$

と同じ形をしている。m を慣性質量と呼んだ。m が大きいほど加速されにくい，つまり慣性が大きい。同様に，I が大きいほど回転しにくい。逆に I が大きい物体は，いったん回転すると止めにくい。すなわち，慣性が大きい。I を慣性モーメントと呼ぶ理由は明らかであろう。

例題 E.3 スケートのスピン
スケート選手のスピンでは，腕を身体に近付けるほど高速で回転する。なぜだろうか。

[解] 回転軸から腕までの距離が短いと慣性モーメントが小さくなり，角運動量保存則 ($I\omega =$ 一定) によって回転が速くなるためである。◇

E.2.2　回転運動の運動エネルギー

固定軸の周りにおける回転運動のエネルギーについて考察しよう。軸の周りの回転角速度を ω とする。剛体を微小部分に分けて i 番目の部分に注目する。その部分の質量を m_i，速さを v_i とすると，その部分の運動エネルギーは $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ である。回転運動だから，軸からの距離を r_i とすると，$v_i = r_i\omega$ (5.3 節) であり，したがって，運動エネルギーは $\frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$ となる。剛体全体の和をとると，回転による運動エネルギー K_r は

$$K_r = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ [J] (回転の運動エネルギー)} \tag{E.12}$$

と書ける。I は式 (E.8) で定義した慣性モーメントである。(ここでも，質量 m，速さ v のときの運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ に対応している。)

E.2.3　慣性モーメントの計算

剛体は連続体なので式 (E.8) の和は積分になる。細い棒，板，3 次元の物体の慣性モーメントを考えよう。i 番目の微小部分の質量を m_i，長さ，面積，体積をそれぞれ $\Delta x_i, \Delta A_i, \Delta V_i$，回転軸からの距離を x_i, r_i, r_i とすると，慣性モーメントは次のように掛ける。

$$I = \lim_{n\to\infty}\sum_i^n m_i r_i^2 = \begin{cases} \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i}{\Delta x_i}x_i^2\Delta x_i = \int_{(\ell)}\lambda x^2 dx & [\mathrm{kg\cdot m^2}]\text{(細いまっすぐな棒)} \\ \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i}{\Delta A_i}r_i^2\Delta A_i = \int_{(A)}\sigma r^2 dxdy & [\mathrm{kg\cdot m^2}]\text{(一様な厚さの板)} \\ \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}r_i^2\Delta V_i = \int_{(V)}\rho r^2 dV & [\mathrm{kg\cdot m^2}]\text{(3 次元の物体)} \end{cases} \tag{E.13}$$

ここで λ, σ, ρ はそれぞれ，物体の線密度 [kg/m]，面密度 [kg/m^2]，体積密度 [kg/m^3](一般には位置の関数) である[1]。

例題 E.4 棒の中心を通り，棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント
長さ ℓ，質量 m の細い一様な棒がある。棒の中心を通り, 棒に垂直な軸の周りの慣性モーメントを求めなさい。

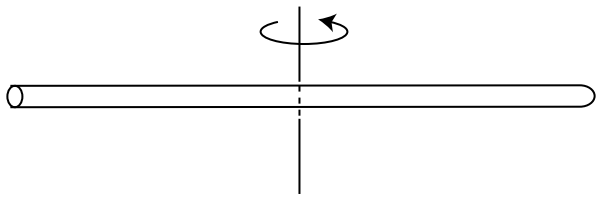

図 E.3: 棒の慣性モーメント

[解] 線密度 $\lambda = \frac{m}{\ell}$ だから

$$I = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}\lambda x^2 dx = \frac{m}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m\ell^2}{12} \text{ [kg·m}^2\text{]} \tag{E.14}$$

を得る。◇

[1]密度として人口密度，電荷密度などが挙げられるが，単に密度というと通常は質量密度を表す。

例題 E.5 長方形の板の慣性モーメント
辺の長さが a と b の薄い一様な長方形の板がある。図 E.4 のように長方形の板の中心を原点として座標軸を定めるとき，x 軸，y 軸，z 軸の周りの慣性モーメント I_x, I_y, I_z を求めなさい。

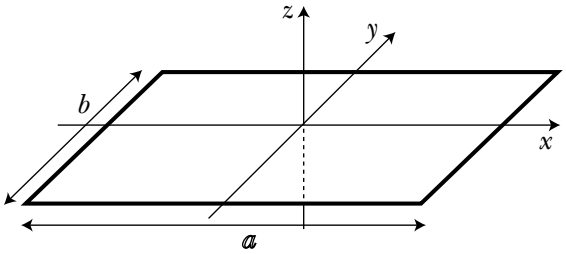

図 E.4: 長方形の板の慣性モーメント

[解] 面密度 $\sigma = \frac{m}{ab}$ なので

$$I_x = \sigma \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{mb^2}{12} \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \tag{E.15}$$

同様に

$$I_y = \frac{ma^2}{12} \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \tag{E.16}$$

I_z は，位置 (x, y) にある微小部分 (dx, dy) の z 軸からの距離が $\sqrt{x^2+y^2}$ であるから，x, y について積分して，

$$I_z = \sigma \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy(x^2+y^2) = I_y + I_x = \frac{m(a^2+b^2)}{12} \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \tag{E.17}$$

となる。この $I_z = I_x + I_y$ は任意の形の一様な平面板について成り立つ。

$$I_z = I_x + I_y \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \ (\text{一様な平面板に対する直交軸の定理}) \tag{E.18}$$

これを**直交軸の定理** (theorem of perpendicular axes) と呼ぶ。◇

例題 E.6 円板の慣性モーメント
半径 a，質量 m の薄い一様な円板の中心を通り，板に平行な軸，および板に垂直な軸の周りの慣性モーメントを求めなさい。

[解] まず，板に垂直な軸 (z 軸とする) の周りの慣性モーメントを求めよう。面密度は $\sigma = \frac{m}{\pi a^2}$ である。円筒座標を用い，面積要素が $rdrd\varphi$ であることから

$$I_z = \frac{m}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a rdrr^2 = \frac{ma^2}{2} \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \tag{E.19}$$

を得る。直交軸の定理 $I_z = I_x + I_y$ と $I_x = I_y$ より，円の中心を通り円板に平行な軸の周りの慣性モーメントは，$I_x = I_y = \frac{ma^2}{4}$ [kg·m^2] となる。◇

問題 E.1 円柱の慣性モーメント
半径 a，高さ h，質量 m の一様な円柱の，中心軸の周りの慣性モーメントを求めなさい。
⋈

例題 E.7 球の慣性モーメント
半径 a，質量 m の球の中心軸の周りの慣性モーメントを求めなさい。

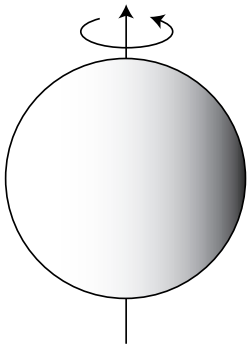

図 E.5: 一様な球の慣性モーメント

[解] 密度 $\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3}$，軸を z 軸ととると，任意の点 r, θ, φ での体積要素は $r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$，回転軸との距離は $r\sin\theta$(図 A.6 の OH の長さ) なので

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3}\int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (r\sin\theta)^2 \\ &= \frac{2\pi m}{\frac{4}{3}\pi a^3}\int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \\ &= \frac{2\pi m}{\frac{4}{3}\pi a^3}\cdot\frac{a^5}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{5}ma^2 \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \end{aligned} \tag{E.20}$$

ここで θ の積分は，$\cos\theta = x$ のように変数変換することによって簡単に求まる。◇

これまで，重心を通る軸の周りの慣性モーメントを求めたが，次の**平行軸の定理** (theorem of parallel axes) を用いれば，任意の軸の周りの慣性モーメントも簡単に求まる。

例題 E.8 平行軸の定理
重心を通る軸の周りの慣性モーメント I_G が与えられたとき，その軸に平行な軸の周りの慣性モーメントは

$$I = I_G + mr_0^2 \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \ (\text{平行軸の定理}) \tag{E.21}$$

で与えられることを示しなさい。ただし，r_0 は 2 つの軸の間の距離である。

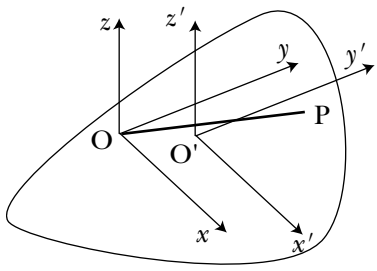

図 E.6: 平行軸の定理

[解] 重心を通る回転軸を z' 軸，それに平行な回転軸を z 軸としよう (図 E.6)。重心を通る x' 軸，y' 軸を定め，それと平行に x, y 軸を定める。剛体を細分化すると

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \\ I_G &= \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \end{aligned} \tag{E.22}$$

重心の座標を (x_G, y_G, z_G) とすると，i 番目の点の座標 (x_i, y_i) は

$$x_i = x_G + x_i',\ y_i = y_G + y_i' \ [\mathrm{m}] \tag{E.23}$$

と書ける。まず x 座標を考えると，

$$\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i x_G^2 + 2x_G \sum_i m_i x_i' + \sum_i m_i x_i'^2 \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \tag{E.24}$$

となる。(x', y', z') 系での重心の位置を (x_G', y_G', z_G') とすると，重心の定義により，右辺第 2 項は

$$x_G' = \frac{\sum_i m_i x_i'}{\sum m_i} \ [\mathrm{m}] \tag{E.25}$$

より $2x_G x_G' \sum_i m_i$ となる。重心を原点に選んだのだから $x_G' = y_G' = z_G' = 0$ であり，よって右辺第 2 項はゼロである，

$\sum_i m_i = m$ なので，y の寄与も加えて $I_G = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2)$ より

$$I = I_G + m(x_G^2 + y_G^2) = I_G + mr_0^2 \ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \tag{E.26}$$

を得る。よって示せた。◇

E.2.4　物理振り子

固定軸が水平方向であり，剛体にはたらく力が重力の場合を考えよう。剛体はをつり合いの位置から持ち上げて放すと振り子運動をするので，そのような剛体を，**物理振り子** (physical pendulum)，または**剛体振り子** (rigid pendulum) という。

例題 E.9 物理振り子の運動方程式
質量 m，固定軸の周りの慣性モーメントが I である物理振り子について，固定軸と重心の距離を ℓ，図 E.7 のように角度 φ をとるとき，その運動方程式を書きなさい。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

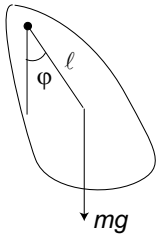

図 E.7: 物理振り子

[解] 固定軸の周りの力のモーメントは，$-mg\ell\sin\varphi$ (負符号の理由は，図 E.7 で力のモーメントの向きが φ の減る方向であるため)。したがって，

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\ell\sin\varphi \text{ [J]} \tag{E.27}$$

この式は，糸の長さが $\ell_0 = \frac{I}{m\ell}$ である単振り子の式 (5.49) と同じである。$\varphi \ll 1$ のときは単振動の式となり，周期は $2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}}$ である。(長さ $\frac{I}{m\ell}$[m] の糸の振り子に相当する。) ◇

問題 E.2 振り子

半径 R，質量 m の小球に長さ ℓ の軽い棒をつけた振り子を，もう片方の先を軸として微小振動させる (図 E.8)。次の問いに答えなさい。ただし，$R \ll \ell$ とする。

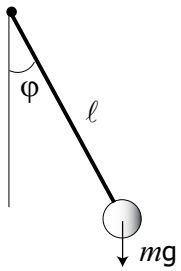

図 E.8: 物理振り子

(1) 振り子の回転軸の周りの慣性モーメントを求めなさい。
(2) 振り子の微小振動の周期を求めなさい。
(3) (2) の周期を長さ ℓ の糸を用いたときの周期と比較しなさい。⋈

例題 E.10 アトウッドの器械 (滑らない滑車)
質量 m_1 と m_2 $(m_1 > m_2)$ を, 軽いロープにより滑車につり下げて手を放したときの運動を考えよう (図 E.9)。これまでとは異なり，ロープは滑車に対し滑らないものとする。滑車の半径を R，重力加速度の大きさを g，慣性モーメントを I として，次の問いに答えなさい。

(1) おもりと滑車の運動方程式を書きなさい。
(2) おもりの加速度を求めなさい。

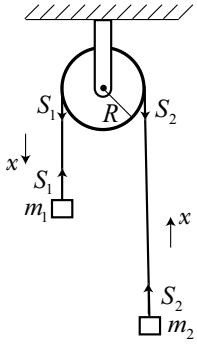

図 E.9: アトウッドの器械

[解] ロープに沿って図 E.7 のように x 軸をとる。ロープの張力をそれぞれ S_1, S_2 (張力は一般に，滑車の両側で異なることに注意)，滑車の回転角を φ とする。

(1) それぞれの運動方程式は,

$$\begin{aligned} \text{おもり 1} \quad &: \quad m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = m_1 g - S_1 \ [\mathrm{N}] \\ \text{おもり 2} \quad &: \quad m_2 \frac{d^2x}{dt^2} = S_2 - m_2 g \ [\mathrm{N}] \\ \text{滑車} \quad &: \quad I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = (S_1 - S_2) R \ [\mathrm{J}] \end{aligned} \tag{E.28}$$

(2) ロープは滑らないので，$R\varphi = x$ が成り立つ (例題 E.11)。これを式 (E.28) の第 3 式に代入し，式 (E.28) を辺々足し合わせて

$$\begin{aligned} \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) \frac{d^2x}{dt^2} &= (m_1 - m_2) g \ [\mathrm{N}] \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g \ [\mathrm{m/s^2}] \end{aligned} \tag{E.29}$$

を得る。◇

E.2.5　剛体の平面運動

これまでは，剛体の固定軸の周りの運動を考えた。ここでは，回転と並進が組み合わさった運動を考えよう。

xy 平面で運動する剛体の位置と向きは，剛体の重心の座標 (x, y) と重心の周りの回転角 φ で決まる。平面運動の運動方程式は

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x \text{ [N]} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y \text{ [N]} \\ I\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= M_z \text{ [J]} \end{aligned} \tag{E.30}$$

I は重心の周りの慣性モーメント，M_z は重心の周りの外力のモーメントである。

例題 E.11 水平面上を滑らずに転がる剛体
半径 R の円柱，円筒，球，球殻などが，水平面上を滑らずに距離 x だけ進み，その間の回転角を φ とすれば

$$x = R\varphi \tag{E.31}$$

の関係が成り立ち，速度 v と角速度 ω との間には

$$v = R\omega \text{ [m/s]} \tag{E.32}$$

の関係が成り立つことを示しなさい。

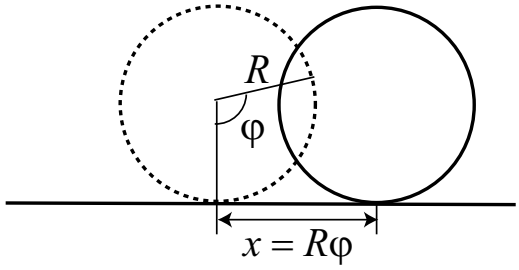

図 E.10: 平面上を滑らずに転がる剛体

[解] Δt 時間に進む距離は $x = v\Delta t$，その間の回転角は $\varphi = \omega\Delta t$ であり滑らないで転がったので，距離は $x = R\varphi$ に等しい ((E.31)，図 E.10)。よって

$$v\Delta t = R\omega\Delta t \text{ [m]} \tag{E.33}$$

であり，(E.32) を得る。◇

ここで，剛体の平面運動の例を見よう。

例題 E.12 斜面を転がる円柱
水平面と角度 θ をなす斜面を，滑らずに転がる円柱がある (図 E.11)。円柱の半径を R，質量を m，慣性モーメントを I として，加速度を求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

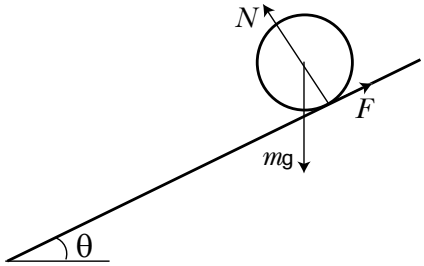

図 E.11: 斜面を転がる円柱

[解] 滑らずに転がるので，斜面と剛体の接点には斜面に沿って上向きに摩擦力 F がはたらいている。斜面に沿って下方を x 軸とすると，重心の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\theta - F \text{ [N]} \tag{E.34}$$

となる。重心の周りの回転の運動方程式は

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = FR \text{ [J]} \tag{E.35}$$

である。ここで $\varphi = \frac{x}{R}$ を用いると

$$F = \frac{I}{R^2}\frac{d^2x}{dt^2} \text{ [N]} \tag{E.36}$$

となる。式 (E.34) に代入して

$$\left(m + \frac{I}{R^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\theta \text{ [N]} \tag{E.37}$$

であるから，すなわち

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I}{mR^2}} \text{ [m/s}^2\text{]} \tag{E.38}$$

を得る。このように，一定の加速度で斜面を転がることが分かる。またその加速度は，なめらかな斜面を滑る質点の加速度の $\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)^{-1}$ 倍である。すなわち質点に比べて小さい加速度で転がる。また慣性モーメントが大きい程，ゆっくりと転がることが分かる。◇

例題 E.13 斜面を転がる剛体と力学的エネルギー保存則
円柱を斜面に静かに置いたところ，滑らずに転がり始めた。斜面に沿って L だけ下ったときの円柱の速度を求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

[解] 運動方程式から直接求めることができるが，力学的エネルギー保存則からも簡単に求まる。速度を v とすると，はじめの位置エネルギー $mgL\sin\theta$ が，並進と回転の運動エネルギーに変わったので

$$mgL\sin\theta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ [J]} \tag{E.39}$$

が成り立つ。また，$v = R\omega$ なので

$$v = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1+\frac{I}{mR^2}}} = \sqrt{\frac{4gL\sin\theta}{3}} \text{ [m/s]} \tag{E.40}$$

を得る。(摩擦力は仕事をしていないので，考慮する必要がないことに注意しよう。) ◇

問題 E.3 運動方程式からの導出

例題 11.4 を，運動方程式から通常の方法で直接求めなさい。⋈

問題 E.4 速さ比べ

斜面を滑らずに転がる一様な球，球殻，円柱，円筒がある。速い順に並べなさい。⋈

付 録F　現代物理学

教科書では，19 世紀末までに確立された古典物理学を扱った。物理学は 19 世紀末から主に 2 つの方向に大きく発展した。1 つはミクロの世界の理解，そしてもう一つは宇宙の発展と構造の理解である。ミクロの世界を記述する量子力学，時空間についての枠組みを与える特殊相対性理論，そして宇宙の発展を記述する一般相対性理論は，それまでの常識を破るものであった。

本章ではまず，現代物理学の 2 つの柱，量子力学と特殊相対性理論の基本を身につけよう。その上で，ミクロの世界 (原子核物理学と素粒子物理学)，物質科学の世界 (物性物理学)，超マクロの世界 (宇宙物理学) について概観しよう。

F.1　量子力学

F.1.1　波の粒子性

19 世紀末の物理学の革命の 1 つは,「光が粒子のように振る舞う」というプランク[1]の**光量子仮説**によりもたらされた。プランクは，絶対温度 T の物質 (**黒体**[2](black body)) から放射される光のエネルギーの振動数 (ν) 依存性を正確に記述する**プランクの「放射公式」**を発見した。

$$\frac{dw(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_{\mathrm{B}}T}\right)-1}\ [\mathrm{J{\cdot}s/m^3}]\ (\text{放射公式 (振動数分布)}) \tag{F.1}$$

ここで c は光速，k_{B} はボルツマン定数である。また，h は**プランク定数** (Planck constant) と呼ばれ，ミクロの世界で重要な役割を果たす。その値は

$$h = 6.62606876 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}\ (\text{プランク定数}) \tag{F.2}$$

である。この値が無視できない世界が量子力学の世界であり，その値をゼロとする極限が古典物理学の世界となる (対応原理)。h を 2π で割った $\hbar$(エッチバー) もよく用いられる。

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571596 \times 10^{-34}\ [\mathrm{J{\cdot}s}]\ (\text{プランク定数}/2\pi) \tag{F.3}$$

問題 F.1 放射エネルギーの波長依存性

(F.1) の振動数 (ν) を波長 (λ) に変えて，波長分布の式

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_{\mathrm{B}}T}\right)-1}\ [\mathrm{J/m^4}]\ (\text{放射公式 (波長分布)}) \tag{F.4}$$

を導きなさい。⋈

[1]Planck, Max Karl Ernst Ludwig (ドイツ，1868-1947) 1900 年に発見した (F.1) の放射公式が観測結果をよく記述するので，その理論的解明に没頭し，数週間後，光量子という概念に到達した。

[2]黒体は，光の吸収と放出について平衡状態にあり，放射公式が厳密に成り立つ。

問題 F.2 ウィーンの変位則

温度 T のとき，(F.4) のピークの位置での波長を $\lambda_{\max}$ とするとき，

$$\lambda_{\max} \cdot T \simeq 2.90 \times 10^{-3}\ \mathrm{m{\cdot}K}\ (\text{ウィーン (Wien) の変位則}) \tag{F.5}$$

を導きなさい。(ヒント：$\frac{hc}{\lambda k_{\mathrm{B}} T} \gg 1$ として

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} \simeq \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda k_{\mathrm{B}} T}\right)\ [\mathrm{J/m^4}] \tag{F.6}$$

を用いなさい。) ⋈

(F.5) は，物体の温度が高いほど，それに反比例して分布のピークの波長が短くなることを意味する。遠くの星の表面温度を知ることができるのは，このような法則に依ってである。

問題 F.3 シュテファン・ボルツマンの法則

絶対温度 T の物体が放射する全エネルギーを $U(T)$ とすると，単位時間に放射するエネルギー $E(T)$ は

$$E(T) = \frac{U(T)c}{4} = \sigma T^4\ [\mathrm{J/(m^2{\cdot}s)}]\ (\text{シュテファン・ボルツマン (Stefen·Boltzmann) の法則}) \tag{F.7}$$

と表されることを示しなさい。ここで，

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_{\mathrm{B}}^4}{15c^2h^3}\ [\mathrm{J/(m^2{\cdot}s{\cdot}K^4)}]\ (\text{シュテファン・ボルツマン定数}) \tag{F.8}$$

である。ただし，

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^3}{15} \tag{F.9}$$

を利用してよい。⋈

プランクは (F.1) を理論的に導くことに成功した。しかし，そのために必要な仮定，**光量子仮説**はプランク自身にも信じがたいものだった。光量子仮説とは，波長 λ，振動数 ν の光がエネルギー $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ という光量子の集まりであるというものである。プランクは光が粒子であるとまでは考えなかったが，1905 年，アインシュタイン[3]が光が粒子として振る舞うとして**光電効果**を見事に説明した。光電効果とは，金属に光を当てると電子が飛び出てくる現象である。光電効果の特徴は，金属に光を当てるとき，

(1) 限界波長の存在
ある波長 (限界波長という) より長い波長の光では，光の強度を強くしても電子は出て来ない。

(2) 電子エネルギーの最大値と振動数の関係
飛び出てくる電子のエネルギーには最大値 ($E_{\max}$) があり，光の強度とは無関係に振動数 ν の関数として次のように書ける。

$$E_{\max} = h\nu - W\ [\mathrm{J}] \tag{F.10}$$

W を (その金属の) 仕事関数という。

[3]Einstein, Albert(ドイツ，スイス，アメリカ，1879-1965) 1901 年から特許庁に勤めつていたが，1905 年に発表した 3 つの論文 (光電効果，ブラウン運動，特殊相対論) がどれも超一流で 1905 年は奇跡の年と言われる。

(3) 光の強度と飛び出る電子のエネルギーや個数との関係
光の強度を増すと $E_{\max}$ は変わらず，飛び出る電子の数が増える。

問題 F.4 限界波長
(1) の限界波長 $\lambda_{\max}$ は

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{W}\ [\mathrm{m}] \tag{F.11}$$

で与えられることを示しなさい。⋈

問題 F.5 光電効果の説明
光電効果を光量子仮説によって説明しなさい。また，光が波であるとするとなぜ説明が困難であるかを書きなさい。⋈

F.1.2　粒子の波動性

ド・ブローイ[4]は逆転の発想で，1923 年，粒子も波のように振る舞うのではないかと考えた。運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子は，波長 (λ)

$$\lambda = \frac{h}{|\boldsymbol{p}|}\ [\mathrm{m}]\ (\text{ド・ブローイ波長}) \tag{F.12}$$

の波として振る舞うという考えである。この仮説はすぐに確かめられ，シュレディンガー方程式の導出や電子顕微鏡などの発明につながった。

粒子の波動性を示す端的な例がヤング[5]の二重スリットの実験である。電子の流れを二重スリットに通すと，スクリーン上に縞模様 (干渉パターン) ができる。大変興味深いのは，電子を 1 個 1 個二重スリットに通すときである。スクリーン上には 1 個 1 個の電子の到達点が観測されるが，それらを足し合わせると縞模様になるのである。片方のスリットを塞いだり，どちらを通ったかが分かるようにすると，縞模様が消えてしまう。すなわち，個々の粒子が 2 つのスリットの存在を感じているのである。

次に，ボーア[6]の原子模型について考えよう。

例題 F.1 水素原子のボーア半径
水素原子は，電荷 $+e$ の陽子の周りに電荷 $-e$ の電子 1 個が回っている (F.3.1 節)。ボーア模型では，電子の軌道として一定の軌道半径 a_n のもののみが許される。電子の波動性を考え，軌道には定常波のみが許されるとして

$$a_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}\ [\mathrm{m}]\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{F.13}$$

を導きなさい。ここで m は電子の質量，ε_0 は真空の誘電率である。

[4]de Bloglie, Duc Louis Victor (フランス，1892-1987) 歴史学を専攻して文学士の称号を得たが，物理学者の兄の影響で理論物理学に転向。
[5]Young, Thomas (イギリス，1773-1829) 医師や考古学者などとしても活躍したが，物理学ではヤング率や二重スリットの実験で名を残す。
[6]Bohr, Niels Henrik David (デンマーク，1885-1965) 量子力学の確率解釈や古典物理学との対応原理を考えるなど，コペンハーゲン学派の中心人物であり，量子力学の父して知られる。量子力学の確率解釈等を巡ってのアインシュタインとの深淵で本質的な論争も興味深い。

[解] 電子は，陽子との間のクーロン力と遠心力がつり合っているので，軌道半径を r，速さを v とすると

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\ [\mathrm{N}] \tag{F.14}$$

が成り立つ。電子のド・ブロイ波長は $\lambda = \frac{h}{mv}$ である。円周 $2\pi r$ に定常波ができているとすると，$2\pi r = n\lambda$ を満たす。これらから $v = \frac{nh}{2\pi mr}$ を得る。これを (F.14) に代入して，$r = a_n$ とし，(F.3) の定義を用いて (F.13) を得る。◇

問題 F.6 エネルギーレベル

電子の軌道半径 a_n の電子のエネルギーが

$$E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 \hbar^2}\ [\mathrm{J}] \tag{F.15}$$

で与えられることを示しなさい。ここで，負のエネルギーは，電子が束縛されていることを表す。ただし，電子のエネルギーが

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\ [\mathrm{J}] \tag{F.16}$$

で与えられることを用いなさい。⋈

問題 F.7 ボーア半径と基底状態のエネルギー

$$a_n \simeq 0.529n^2 \times 10^{-10}\ \mathrm{m},\ \ E_n \simeq -\frac{2.18 \times 10^{-18}}{n^2}\ \mathrm{J} \tag{F.17}$$

を導きなさい。⋈

(F.15) のように，量子力学では原子のエネルギーには飛び飛びの値が許される (**エネルギーレベル**，エネルギー準位 (energy level))。(F.15) から，原子のエネルギーレベルは n^2 に反比例し，n が大きいほどエネルギーレベル間の間隔は密になっていくことがわかる。

高いエネルギーレベルにある電子は，光を出して低いレベルの状態に落ち着こうとする。光のエネルギーはそのエネルギー差に等しい ($h\nu = E_m - E_n$) ので，波長が一定の光が放出される。すなわち，光のスペクトルは線スペクトルになる (輝線)。

逆に，低いエネルギーレベルの電子が，対応する波長の光を吸収して，高いエネルギーレベルに移ることができる (吸収線，または暗線)。このような線スペクトルを同定することにより，元素を特定することができる (分光学)。

物質中にはたくさんの原子 (6.0×10^{23} 個/モル) が含まれ，個々の電子のエネルギーレベルが重なり合って帯となる。電子が入りうるエネルギー状態の帯を価電子帯 (valence band)，電子が占めることが許されない帯を禁止帯 (forbidden band) という。

後述 (F.4.1 節) のように，電子は下から価電子帯を占めていく。電子の一番上のエネルギーレベル (絶対零度で) をフェルミ[7]レベルという。フェルミレベルが価電子帯の中にある物質を金属といい，禁止帯の中にあるものを絶縁体または半導体と呼ぶ。絶縁体は禁止帯の幅 (上端部と下端部のエネルギー差) が大きい物質，半導体はそれほど大きくないものをいう。

半導体にいろいろな別の元素 (不純物) を混ぜて n 型や p 型半導体がつくられ，現代の半導体文明が築かれた。

[7]Fermi, Enrico (イタリア，1901-1965) フェルミ液体，フェルミ加速などフェルミの名を冠した物理用語は多数ある。原子炉の運転を初めて成功させたことでも有名。

問題 F.8 金属，絶縁体，半導体の理解
以上のことから，金属が導電性をもち絶縁体が絶縁性をもつ理由を説明しなさい。⋈

F.1.3 シュレデインガー方程式

粒子は波として振る舞うのであるから，波動関数 (wave function) $\psi(x,y,z,t)$ で表される。さらに，$|\psi(x,y,z,t)|^2$ は粒子が時刻 t に位置 (x,y,z) にいる確率を表す (確率解釈 (probabilistic interpretation))。1 個の粒子を考える場合は，規格化条件 (normalization condition)

$$\int_{(V)} dV|\psi(x,y,z,t)|^2 = 1 \text{ (波動関数の規格化条件)} \tag{F.18}$$

が課せられる。V は粒子が存在する空間である。

ある方向 (x 方向とする) へ自由に (相互作用無しに) 直進する粒子の波動関数は平面波で表され，以下のように書ける。

$$\psi(x,t) = N\exp\left(i(kx-\omega t)\right) \tag{F.19}$$

ここで N は規格化定数 (normalization constant) である。

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p_x}{\hbar}\ [\mathrm{m}^{-1}],\ \ \omega = \frac{E}{\hbar}\ [\mathrm{s}^{-1}] \tag{F.20}$$

を代入すると

$$\psi(x,t) = N\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)\right] \tag{F.21}$$

と書ける．任意の方向に進む波は，次のように書ける。

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = N\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)\right] \tag{F.22}$$

すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar}E\psi \\ \boldsymbol{\nabla}\psi &= \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\psi\end{aligned} \tag{F.23}$$

なので，次の対応関係が成り立つ。

$$E \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\ \ \boldsymbol{p} \leftrightarrow -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\ [\mathrm{kg{\cdot}m/s}] \tag{F.24}$$

このように量子力学では，複素数とプランク定数 h が本質的な役割を果たす。

波動関数は波動方程式に従うはずである。量子の世界での波動関数が従うべき波動方程式を導こう。非相対論領域 (粒子の速さ v が $v \ll c$ の領域) では，ポテンシャルを $V(\boldsymbol{r})$ として

$$E = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m} + V(\boldsymbol{r})\ [\mathrm{J}] \tag{F.25}$$

と書けるので，(F.24) の対応を用いると

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi + V\psi \text{ (シュレディンガー方程式)} \tag{F.26}$$

と書ける。これが**シュレディンガー**[8]**方程式** (Schrödinger equation) である。

通常，エネルギーが一定の場合を考え，定常状態では変数分離することができる．以後，1 次元の場合を考えるので

$$\psi(x,t) = u(x)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \tag{F.27}$$

と置くことができ，シュレディンガー方程式は，

$$Eu(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + Vu(x) \text{ (定常状態での 1 次元のシュレディンガー方程式)} \tag{F.28}$$

となる。

実際にシュレディンガー方程式を解いてみよう。

例題 F.2 井戸型ポテンシャルの解
質量 m の粒子が 1 次元の井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \le x \le a \\ \infty & : \quad x < 0, x > a \end{cases} \tag{F.29}$$

の中で運動している場合の，波動関数 $\psi(x,t)$ とエネルギーレベルを求めなさい。

[解] 粒子の波動関数を $\psi(x,t)$ とすると，$0 \le x \le a$ でのシュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{F.30}$$

と書ける。定常波では t と x が変数分離の形で書けるので，(F.27) と置くと (F.30) は

$$Eu(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} \tag{F.31}$$

となり，A, B を未知の係数として，

$$u(x) = A\sin kx + B\cos kx,\ k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\ [\mathrm{m}^{-1}] \tag{F.32}$$

と表すことができる。境界条件 $u(0) = u(a) = 0$ より

$$u(x) = A\sin k_n x,\ k_n = \frac{n\pi}{a}\ [\mathrm{m}^{-1}]\ (n = \pm1, \pm2, \cdots) \tag{F.33}$$

を得る。したがって

$$E_n = \frac{(\hbar k_n)^2}{2m} = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\ [\mathrm{J}] \tag{F.34}$$

を得る。また波動関数は，規格化条件

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1 \tag{F.35}$$

より $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ となる。したがって

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\exp\left[-\frac{in^2\hbar\pi^2}{2ma^2}t\right],\ (n = \pm1, \pm2, \cdots) \tag{F.36}$$

[8] Schrödinger, Erwin (オーストリア，1887-1961) 「シュレディンガーの猫」という観測問題の提示でも有名。

を得る。◇

次に，周期的境界条件を課す場合について見てみよう。

例題 F.3 リング内を自由に運動する粒子
質量 m の粒子が周長 a の細いリング内で自由に運動している場合の，波動関数 $\psi(x,t)$ とエネルギーレベルを求めなさい。

[解] リングに沿って x 軸をとり，原点を適当に定める。粒子の波動関数を $\psi(x,t)$ とすると，シュレディンガー方程式は (F.30) と書ける。定常波では t と x が変数分離の形で書けるので (F.27) と置くと，(F.30) は (F.31) となり，A, ϕ_0 を未知の定数として，

$$u(x) = A\cos(kx+\phi_0),\ k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\ [\mathrm{m}^{-1}] \tag{F.37}$$

と表すことができる。境界条件は，波動関数が周期的である，すなわち $u(x+a) = u(x)$ より

$$k_n = \frac{2n\pi}{a}\ [\mathrm{m}^{-1}]\ (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{F.38}$$

を得る。したがって

$$E_n = \frac{(\hbar k_n)^2}{2m} = \frac{2n^2\hbar^2\pi^2}{ma^2}\ [\mathrm{J}] \tag{F.39}$$

を得る。また波動関数は，規格化条件 (F.35) より $A = \sqrt{\frac{2}{a}}\ (n \neq 0)$ となる。したがって

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}+\phi_0\right)\exp\left[-i\frac{2n^2\hbar\pi^2}{ma^2}t\right],\ (n = \pm1, \pm2, \cdots) \tag{F.40}$$

を得る。ϕ_0 は任意のままであるが，$\phi_0 = 0$ と置いても一般性を失なわない[9]。◇

古典粒子では起こらない現象，量子力学特有のトンネル効果 (tunneling effect) についてみてみよう。

例題 F.4 トンネル効果

$$V(x) = \begin{cases} V_0\ [\mathrm{J}] & : \ 0 \le x \le a \\ 0 & : \ x < 0, x > a \end{cases} \tag{F.41}$$

という障壁 (ポテンシャル) がある。この左 $(x < 0)$ からエネルギー $E < V_0$ の粒子 (質量 m) が入射したとき，ポテンシャルを透過する確率を求めなさい。

[解] 波動関数は (F.23) のように表され，$u(x)$ は

$$u(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & : \ x < 0 \\ Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} & : \ 0 \le x \le a \\ Te^{ikx} & : \ x > a \end{cases} \tag{F.42}$$

[9] $n = 0$ のときは，$\psi_0(x,t) = \frac{1}{a}$ である。例題 F.2 の場合も同様である。しかしながら，$n = 0$ のときは粒子は運動をしていないので除外してもよい。

と表される。ここで

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\ [\mathrm{m}^{-1}]\ \ \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}\ [\mathrm{m}^{-1}] \tag{F.43}$$

であり，e^{ikx} は右 ($+x$ 方向) へ，e^{-ikx} は左へ進む波を表す (C.3 節)。入射波の確率は 1 としてあるので，$|R|^2$ は反射率，$|T|^2$ は透過率を表す。A, B は未知の係数である。

A, B, R, T を求めるには波動関数の連続性を用いる。波動関数 $u(x)$ とその導関数 $\frac{du(x)}{dx}$ は $x = 0, a$ で連続である。連続であるとは，たとえば，$x = a$ では，

$$\begin{aligned} Ae^{\kappa a} + Be^{-\kappa a} &= Te^{ika} \\ A\kappa\left(e^{\kappa a} - Be^{-\kappa a}\right) &= ikTe^{ika} \end{aligned} \tag{F.44}$$

が成り立つ。同様に $x = 0$ での式も書き下せる。これらから $|T|^2$ を求めて，次式を得る。

$$|T|^2 = \left(\frac{4\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2\sinh^2(\kappa a) + \alpha^2\cosh^2(\kappa a)}\right)^2 \tag{F.45}$$

ここで $\alpha = \frac{k}{\kappa}$ である。また，$|R|^2 + |T|^2 = 1$ となっている。◇

F.1.4　不確定性原理

波動関数にかかるものを演算子 (operator) という。$\boldsymbol{\nabla}$ や $\frac{\partial}{\partial t}$ などがその例である。2 つの演算子 P, Q の交換関係 (commutation relation)

$$[P, Q] = PQ - QP \tag{F.46}$$

について考えよう。$[P, Q] = 0$ のとき可換 (Abelian)，$[P, Q] \neq 0$ のとき非可換 (non Abelian) という。

$$P = p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\ [\mathrm{kg{\cdot}m/s}],\ \ Q = x\ [\mathrm{m}] \tag{F.47}$$

を考え，波動関数 $\psi(x, t)$ に演算しよう。

$$[p_x, x]\psi(x,t) = p_x\left(x\psi(x,t)\right) - xp_x\psi(x,t) = -i\hbar\left(\frac{\partial(x\psi(x,t))}{\partial x} - x\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right) = -i\hbar\psi(x,t) \tag{F.48}$$

すなわち，演算子として次式が成り立つ。(右側にいつも $\psi(x, t)$ があると考える。)

$$[p_x, x] = -i\hbar\ [\mathrm{J{\cdot}s}] \tag{F.49}$$

(F.49) は $\Delta p_x \Delta x$ を p_x, x の不確定性として，

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}\ [\mathrm{J{\cdot}s}] \tag{F.50}$$

と書くこともでき (証明を省く)，x(位置) と p_x(運動量) を同時に正確に決めることはできないことを表す。この式をハイゼンベルグ[10]の**不確定性原理** (uncertainty principle) という。

同様に

$$[E, t] = i\hbar\ [\mathrm{J{\cdot}s}] \tag{F.51}$$

が得られる。すなわち，

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}\ [\mathrm{J{\cdot}s}] \tag{F.52}$$

が成り立つ。すなわち，時間とエネルギーを同時に正確に決めることはできない。

[10]Heisenberg, Werner Kar (ドイツ，1901-1976) 幼少の頃から神童の誉れが高く，スポーツ，ピアノ，チェスなどにも才能を発揮。行列形式の量子力学を確立したが，シュレディンガー方程式と同等であることがわかって，より便利な後者が広く使われることになった。

F.2　相対性理論

相対性理論 (relativistic theory) は一般に，速さが光速に近付いたとき重要になると言われる。それならばなぜ，相対性理論と呼ばれるのであろうか。それは，物理の大原則，**相対性原理**が根底にあるからである。古典物理学では少なくとも時間は絶対的なもので，どの系から見ても同じように流れていた。しかし，相対性理論では時間も相対的であり,「同時」という概念もきちんと定義されなければならない。

相対性理論は，特殊相対性理論と一般相対性理論との 2 つに分けられる。その確立に中心的役割を果たしたのはアインシュタインであるが，他の人たちも大きな貢献をした。

特殊相対性理論 (special relativity) は，速さが光速に近付いたときにも正しい理論の枠組を与える。一方，一般相対性理論 (general relativity) は，重力を幾何学的視点，すなわち，時空の曲がりから説明する理論である。一般相対性理論は宇宙の発展，構造を論ずる枠組を与える。ここでは特殊相対性理論の基本的な枠組を理解し，どのように「奇妙な帰結」である, ローレンツ収縮 (動く物体の長さは縮んで見える) や，動く時計の遅れ等が導かれるかをみよう。そして一般相対性理論を覗いて見よう。

F.2.1　特殊相対性理論の基本原理

アインシュタインが 1905 年に確立した特殊相対性理論は，2 つの大原則に基づいている。

(1) 相対性原理
　全ての慣性系は同等である。すなわち，どの慣性系でも同じ形の物理原則が成り立つ。
(2) 光速不変の原理
　光源の運動にかかわらず，真空中の光速 (c) は一定である。

このたった 2 つの原理から，ローレンツ[11]収縮や時計の遅れ等の驚くべき結論が得られる。

F.2.2　ローレンツ変換

この 2 つの要請からローレンツ変換を導こう。

これらの議論のため，2 つの系 S 系と S′ 系を定義しよう。S 系は我々がいる系，S′ 系は S 系に対して $+x$ 方向に速度 v で動いているとしよう。また，$t = t' = 0$ に，S 系の原点 O と S′ 系の原点 O′ が一致したとしよう (図 F.1)。

ある物体 (質点) の運動を，S 系と S′ 系で観測した場合の座標間の関係式を求めよう。ある瞬間の物体 (点と考える) の位置が，S′ 系では時刻 t' に (x', y', z') にあり，S 系ではそれに対応する時刻 t に (x, y, z) にあるとしよう。まずは，古典的な関係式，ガリレイ[12]変換について復習しよう。

[11]Lorentz, Hendrik Antoon (オランダ，1853-1928) エーテル (電磁波を伝える媒質 (「物質」) で宇宙を満たしていると考えられた) に対する地球の速度を検出しようとして，マイケルソン・モーレイの実験が行われた。実験は，十分な精度を持っていたにもかかわらず，公転方向とそれと直角方向の速度の差を検出できなかった。その結果を説明するために，ローレンツ変換や収縮というアイデアを導入した。これらは特殊相対性理論の先駆となった。

[12]Galilei, Galileo (イタリア，1564-1652) 実験に基づく物理学の祖と言われる。1609 年，ガリレオ式望遠鏡により木星の 4 個の衛星を発見するなどしたことを記念して，2009 年は世界天文年とされた。

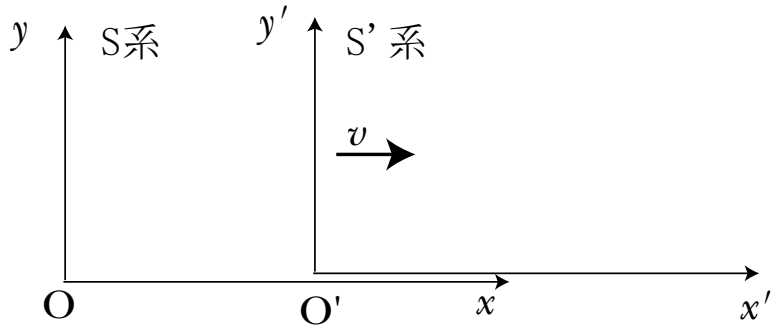

図 F.1: S 系と S′ 系

例題 F.5 ガリレイ変換
古典的 (非相対論的) には，次のガリレイ変換 (Galilei transformation) が成り立つことを示しなさい。

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \text{ [m]} \\ y' &= y \text{ [m]} \\ z' &= z \text{ [m]} \\ t' &= t \text{ [s]} \end{aligned} \tag{F.53}$$

[解] 古典的には $t = t'$ であり，時刻 t 後の O′ の S 系での座標は，$\overline{\mathrm{OO}}' = vt$ であるから

$$\begin{aligned} x &= x' + vt \text{ [m]} \\ y &= y' \text{ [m]} \\ z &= z' \text{ [m]} \\ t &= t' \text{ [s]} \end{aligned} \tag{F.54}$$

すなわち，(F.53) が求まる。◇

例題 F.6 ガリレイ変換と光速不変の原理
ガリレイ変換は，光速不変の原理を破っていることを示しなさい。

[解] $t = 0$ に，$+x$ 方向へ原点 O から光を発したとする。時刻 t 後の光の位置は $x = ct$ である。S′ 系でも光速不変の原理から $x' = ct'$ となる。非相対論では $t = t'$ であるから，$x' = ct' = ct = x$ となって (F.53) と矛盾する。◇

ガリレイ変換では，光速不変の原理を破っているので，別の変換則，ローレンツ変換 (Lorentz transformation) が必要になる。

例題 F.7 ローレンツ変換
ある物体について，S′ 系での時刻 t' での位置 (x', y', z') と，S 系での時刻 t での位置 (x, y, z) とが，次のローレンツ変換で結ばれることを導きなさい。

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct)\ [\mathrm{m}] \\ y' &= y\ [\mathrm{m}] \\ z' &= z\ [\mathrm{m}] \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x)\ [\mathrm{m}] \end{aligned} \tag{F.55}$$

ここで，β, γ は次式で与えられる。

$$\beta = \frac{v}{c},\ \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{F.56}$$

[解] 光速不変の原理を満たすにはガリレイ変換ではだめなので，$\beta = \frac{v}{c}$ と置き，γ を未知の係数として

$$x' = \gamma(x - \beta ct)\ [\mathrm{m}] \tag{F.57}$$

と置いてみる。これは $x = vt$ が $x' = 0$，すなわち S′ 系の原点 O′ であることを満たしている。$t = t' = 0$ に原点から発した $+x$ 方向の光を考えよう。光速不変の原理によって，時刻 t での S 系での光の位置は $x = ct$, 時刻 t' での S′ 系での位置は $x' = ct'$ である。これらを (F.57) に代入すると

$$ct' = \gamma(1 - \beta)ct\ [\mathrm{m}] \tag{F.58}$$

が成り立つ。

立場を変えて考えてみよう。S 系では S′ 系に対して $-v$ で動いているのだから，相対性原理により，(F.57) に対応する式として

$$x = \gamma(x' + \beta ct')\ [\mathrm{m}] \tag{F.59}$$

が成り立つ。$x = ct, x' = ct'$ を代入すると

$$ct = \gamma(1 + \beta)ct'\ [\mathrm{m}] \tag{F.60}$$

となる。ここで (F.58) と (F.60) とから

$$\gamma^2(1 - \beta^2) = 1 \tag{F.61}$$

となる。$\gamma > 0$ なので (F.56) を得る。また (F.57) と (F.59) から

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)\ [\mathrm{m}] \tag{F.62}$$

も求まる。よって (F.55) が導かれた。◇

問題 F.9 ガリレイ変換との関係
非相対論的極限 ($\beta \ll 1$) では，ローレンツ変換はガリレイ変換に一致することを示しなさい。⋈

問題 F.10 ローレンツ逆変換
(F.55) から，S 系の座標が次のように表されることを示しなさい。

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') \text{ [m]} \\ y &= y' \text{ [m]} \\ z &= z' \text{ [m]} \\ ct &= \gamma(ct' + \beta x') \text{ [m]} \end{aligned} \tag{F.63}$$

⋈

F.2.3 ローレンツ収縮，時間の遅れ

ローレンツ変換から，動く棒は短く見えることを示そう。

例題 F.8 ローレンツ収縮
速度 v で動く棒は，$\frac{1}{\gamma}$ 倍に縮んで見える (ローレンツ収縮 (Lorentz contraction)) ことを導きなさい。

[解] S′ 系に固定された棒の両端の x' 座標を x'_1, x'_2 とし，$L_0 = x'_2 - x'_1$ とする。また，S 系での棒の長さを $L = x_2 - x_1$ とする。ローレンツ変換より

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta ct_1) \text{ [m]} \\ x'_2 &= \gamma(x_2 - \beta ct_2) \text{ [m]} \end{aligned} \tag{F.64}$$

となる。棒の長さは S 系では同時に測るので，$t_1 = t_2$ である。したがって

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L \text{ [m]} \tag{F.65}$$

を得る。したがって，S 系での長さ L は

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \leq L_0 \text{ [m]} \ (\gamma \geq 1) \tag{F.66}$$

となって動く棒は短く見える。◇

問題 F.11 S 系での棒の長さ
S 系に置かれた棒の長さは，S′ 系ではやはり縮んで見えることを示しなさい。⋈

次に，速度の加法則を導こう。

例題 F.9 速度の加法則
S′ 系の中で $+x'$ 方向に速度 u で動いている物体の S 系での速度 w が，

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \text{ [m/s] (速度の加法則)} \tag{F.67}$$

で与えられることを示しなさい。

[解] 物体の速度は S′ 系で $u = \frac{dx'}{dt'}$ と表される。S 系での速度は $w = \frac{dx}{dt}$ なので，(F.63) より

$$w = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \text{ [m/s]} \tag{F.68}$$

を得る。◇

非相対論的な場合には (F.67) の分母が 1 となって，通常の加法則に一致することがわかる。また，$u = c$ または $v = c$ のとき $w = c$ となり，とくに $u = v = c$ のときも $w = c$ となって，光速不変の原理が成り立っていることがわかる。

今度は，動いている時計は遅れて見えることを示そう。

例題 F.10 時計の遅れ
S′ 系の時計は，S 系から見て遅れて見えることを示しなさい。

[解] S′ 系の原点に固定された時計を，$t = t' = 0$ に S 系の時計と合わせたとしよう。S′ 系では原点にあるので，時刻 t' の時計の位置は $x' = 0$ である。したがって (F.55) より，S 系で時刻 t での時計の位置は $x = vt = \beta ct$ である。(F.55) より ct' を求めると，

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma(1-\beta^2)ct = \frac{ct}{\gamma} \leq ct \text{ [m]} \tag{F.69}$$

が得られる。よって，S′ 系の時計は，S 系では遅れて見える。◇

問題 F.12 時計の遅れ (2)
S′ 系から見れば，S 系の時計はやはり遅れて見えることを示しなさい。⋈

F.2.4　4 次元の世界とミンコフスキー座標

相対論によると時間さえも相対的であり,「同時」という概念も，異なる座標系の間では注意を要する。実際，相対論では，空間 3 次元と時間とを合わせて，4 次元のベクトルと考える。

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x_1, x_2, x_3) = (ct, \boldsymbol{r}) \text{ [m]} \tag{F.70}$$

ここで，光速 c は次元を合わせるために導入される。$\boldsymbol{r}$ は 3 元位置ベクトルである。

同様に 3 次元運動量 $\boldsymbol{p}$ とエネルギー E とを合わせて 4 元運動量 p を次のように定義する。

$$p = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}) \text{ [kg·m/s]} \tag{F.71}$$

$\boldsymbol{p}$ は 3 元運動量ベクトルである。このようにエネルギーも座標系に依る量であり，4 元運動量ベクトルの第 0 成分である。これらの 4 元ベクトルも (F.55) のローレンツ変換に従う。

2 つの 4 元ベクトル A, B の内積は次のように定義され，内積はローレンツ不変量 (どの慣性系でも同じ値をもつ量) となる。

$$A \cdot B = A_0B_0 - (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) = A_0B_0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \tag{F.72}$$

符号を逆に定義することも多い。すなわち，

$$A \cdot B = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - A_0B_0 \tag{F.73}$$

もよく使われる。ここでは (F.72) の定義を用いる。

問題 F.13 ローレンツ不変量

(F.72) のように定義された内積がローレンツ不変量であることを示しなさい。⋈

例題 F.11 エネルギーと質量の関係式

質量 m の粒子における 4 元運動量ベクトルとそれ自身との内積 $p^2 = p \cdot p$ はローレンツ不変量であり，$p^2 = m^2c^2$ と置ける。このことから，エネルギー，3 元運動量と質量との間の関係式を求めなさい。

[解] (F.71) と (F.72) により

$$\frac{E^2}{c^2} - |\boldsymbol{p}|^2 = m^2c^2 \ [\mathrm{kg^2{\cdot}m^2/s^2}] \tag{F.74}$$

すなわち

$$E^2 = |\boldsymbol{p}|^2c^2 + m^2c^4 \ [\mathrm{J^2}] \tag{F.75}$$

を得る。◇

ここで $|\boldsymbol{p}| = 0$，すなわち粒子が静止しているとき，$E = mc^2$ となり，質量 m の粒子が mc^2 のエネルギーをもっていることを表す (**静止エネルギー** (rest energy))。

例題 F.12 粒子の運動量，エネルギーと γ, β との関係

質量 m の粒子のエネルギー E，運動量 $|\boldsymbol{p}|$ は

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \ [\mathrm{J}] \\ |\boldsymbol{p}| &= \gamma\beta mc \ [\mathrm{kg{\cdot}m/s}] \end{aligned} \tag{F.76}$$

と表されることを示しなさい。

[解] S′ 系で静止している粒子は $p' = (mc, 0, 0, 0)$ という 4 元ベクトルで表される。一方 S 系では $p = (\frac{E}{c}, |\boldsymbol{p}|, 0, 0)$ となる。ローレンツ変換より，

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} &= p_0 = \gamma(p'_0 + \beta p'_x) = \gamma mc \ [\mathrm{kg{\cdot}m/s}] \\ |\boldsymbol{p}| &= \gamma(p'_x + \beta p'_0) = \gamma\beta mc \ [\mathrm{kg{\cdot}m/s}] \end{aligned} \tag{F.77}$$

が得られる。ここで $p'_0 = mc, p'_x = 0$ を用いた。よって (F.76) が導かれた。◇

(F.77) より，$\beta = \frac{|\boldsymbol{p}|c}{E}$ となり，$E \to \infty$ のとき $\beta \to 1$ となって，決して光速を超えることはない[13]。

問題 F.14 運動エネルギー

$K = E - mc^2$ を運動エネルギーと言う。$|\boldsymbol{v}| \ll c$ のとき，

$$K = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m} \ [\mathrm{J}] \tag{F.78}$$

を導きなさい。⋈

[13] (F.77) から，$\beta = 0$ のとき $E = mc^2$ なので，m を静止質量 (rest mass) ということもある。また，$m' = \gamma m$ と書いて「速度が光速に近づくほど質量が重くなる」という言い方もされる。しかしながら，質量はあくまで不変量であり，大きくなるのは (F.77) のように，4 元ベクトルの第 0 成分，エネルギーであることに注意。

次に光子の粒子性を直接的に実験で示したコンプトン[14]効果 (Compton effect) について計算してみよう。

例題 F.13 コンプトン効果
波長 λ の光子が静止している電子 (質量 m) と衝突して，角度 θ に散乱されたときの波長 λ' を求めなさい。

[解] 光子のエネルギーは $\frac{hc}{\lambda}$，光子の質量はゼロだから，運動量の大きさは $\frac{h}{\lambda}$ となる。光子の散乱前と後の 4 元運動量を $k_1.k_2$，電子の散乱前と後の 4 元運動量を p_1, p_2 と置こう。光子の入射方向を x 方向とし，光子が xy 平面内に散乱されたとして，

$$\begin{aligned} k_1 &= (\frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda}, 0, 0) \text{ [kg·m/s]} \\ k_2 &= (\frac{h}{\lambda'}, \frac{h}{\lambda'}\cos\theta, \frac{h}{\lambda'}\sin\theta, 0) \text{ [kg·m/s]} \\ p_1 &= (mc, 0, 0, 0) \text{ [kg·m/s]} \end{aligned} \tag{F.79}$$

ここで，4 元運動量保存則

$$k_1 + p_1 = k_2 + p_2 \text{ [kg·m/s]} \tag{F.80}$$

を書き，k_2 を移項した $p_2 = k_1 + p_1 - k_2$ の両辺を 2 乗して (自身との内積をとって)，$p_2^2 = m^2c^2$ を用いると，

$$\begin{aligned} m^2c^2 &= (k_1 + p_1 - k_2)^2 \\ &= k_1^2 + 2k_1p_1 + p_1^2 - 2p_1k_2 + k_2^2 - 2k_1k_2 \text{ [(kg·m/s)}^2\text{]} \end{aligned} \tag{F.81}$$

を得る。$k_1^2 = k_2^2 = 0$ などを用い，(F.79) を代入して整理すると

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \text{ [m]} \tag{F.82}$$

を得る。◇

散乱された光の波長は長くなることがわかる。電子と散乱 (コンプトン散乱) して波長が変化することも，光子が粒子として振る舞う直接証拠であった。$\frac{h}{mc}$ を電子のコンプトン波長 (Compton wavelength) と呼ぶ。

問題 F.15 光のドップラー効果 (赤方偏移)
速さ $v = \beta c$ で遠ざかる光源 (光源での波長 λ_0) から届く光の波長は

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda_0 \text{ [m] (赤方偏移)} \tag{F.83}$$

となり，波長が長くなる (赤方偏移)。これを導きなさい。⋈

図 F.2 のように，縦軸を ct，横軸を x としてとった座標をミンコフスキー (Minkowski) 座標系という。この座標系で S′ 系の ct' 軸，x' 軸を描くと，図 F.2 のように傾いた直線と

[14]Compton, Arthur Holly (アメリカ，1892-1962) 1923 年に，X 線が電子との散乱によって波長が長くなる現象を発見した。これは，電磁波の粒子性を直接示す実験となった。

なる。この座標系上での物体の動く軌跡を，その物体の世界線 (world line) という。ミンコフスキー座標系では，光は x 軸，ct 軸と 45 °を成す直線となる[15]。$\beta \to 1$ $(v \to c)$ のとき，S′ 系の ct', x' はこの線に近付く。

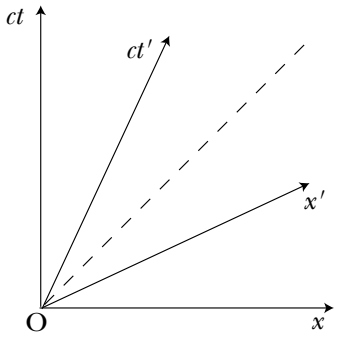

図 F.2: S 系と S′ 系のミンコフスキー座標

例題 F.14 ミンコフスキー座標系とローレンツ収縮
ミンコフスキー座標系を用いて，ローレンツ収縮を示しなさい。

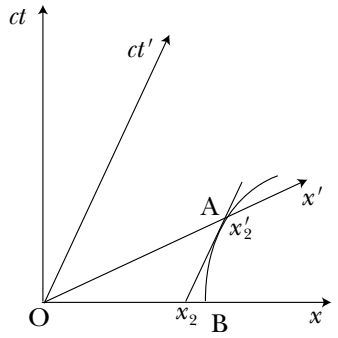

図 F.3: ミンコフスキー座標系でのローレンツ収縮

[解] 例題 F.7 で簡単のため，$x_1' = 0$，x_2' の点を A と置く (図 F.3)。x_2' の S 系での世界線は，棒が S′ 系で静止しているので ct' に平行な線となる。x 軸との交点の座標が x_2 となる。L_0=一定の線は上述のように $L_0 = \sqrt{(ct)^2 - x^2}$ の線で，A を通り x 軸とは B で交わる。明らかに $x_2 < \overline{\mathrm{OB}}$ なので $L < L_0$ である。◇

F.2.5　*一般相対性理論

特殊相対性理論は,「物理法則が座標系に依らない」という相対性原理が慣性系に限られていた。それを非慣性系 (加速度運動をする系) も含むように拡張されたのが一般相対性理

[15]空間が 2 次元の場合は，y 軸を ct 軸と x 軸に直交するようにとる。すると光の世界線は面となり，頂角 90 °の円錐となる。これを光円錐 (light cone) という。空間が 3 次元のときも同様に光円錐という。

論である。1915 年，アインシュタインは，等価原理 (equivalent principle) という概念から，重力は時空間の曲がりから生じるという考えに達して次の方程式を書き下した。

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{F.84}$$

ここで，G は重力定数，μ, ν は 0,1,2,3 の「足」であり，

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{F.85}$$

と定義される。ここで $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル，R はそれに $g^{\mu\nu}$ をかけて「縮約」したもの[16]，$g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれるもので，平坦な時空間では

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{F.86}$$

となる ((F.73) の定義に対応する)。Λ は宇宙項 (cosmological term) と呼ばれる。$T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルである。

(F.84) の左辺は時空の曲率，右辺は物質やエネルギーの寄与であり両者が等号で結ばれている。(F.84) から，重力が強いほど時間の進みが遅いことなどが導かれる。さらに，(F.84) でブラックホール (black hole) などはもちろんのこと，宇宙の発展までもが記述できるとは，何とすごいことだろうか。

F.3 原子核物理学

この節では，原子の構造を理解し，その中心にある原子核 (nucleus) の安定性，原子力エネルギーの源，放射性元素等について理解を深めよう。

F.3.1 原子の構造

物質は原子からできている。原子は現在では，電子顕微鏡によって「目で見る」ことができ，その大きさは 0.1 nm (1.0×10^{-10} m) 程度である。物質中の原子間の距離もおよそ 0.1 nm である。周期表で見るように 100 種類ほどの原子があり，原子番号 Z の原子には Z 個の電子があることがわかっている。元素の化学的性質は電子の数で決まっている。

原子は全体として中性 (電荷がゼロ) なので，それを打ち消す正の電荷の「何か」が原子の中にあることになる。電子は原子に比べて約 1 万倍も軽いので，正電荷をもつ「何か」は原子の質量のほとんどを担っている。それでは，原子はどのような構造をしているのであろうか。20 世紀初頭に考えられた原子模型は次の 2 つである。

(1) 太陽系型模型
太陽 (正電荷をもつ「何か」(原子核と呼ぶ)) の周りを，万有引力 (クーロン引力) とつり合うように惑星 (電子) が回っている。

(2) ぶどうパン型模型
パン (正電荷をもつ「何か」) の中に干しブドウ (電子) が散りばめられている。

[16] $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$，$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$，通常，上と下に同じギリシャ文字があるとき，0 から 3 まで足し算することを意味し，これを縮約という。すなわち，足し算記号 ($\sum_\mu \sum_\nu$) が省かれている。

この 2 つの模型のどちらが正しいかを，どうやったら確かめることができるだろうか。それには，現在でも使われている散乱実験を行えばよい。その先駆的実験ともいうべきラザフォード[17]散乱についてみてみよう。

例題 F.15 散乱実験と原子模型
1909 年ごろからラザフォードらは，正の電荷をもつ重い α 粒子 (後にヘリウム原子核とわかった) を薄い金箔に衝突させ，その散乱角度 (入射方向からの角度) を測定した。α 粒子は電子の約 1 万倍も重いので，電子による散乱は無視できる。このとき散乱角分布は，上の 2 つの模型でどのように異なると予想されるか。

[解] 次のような結果が予想される。

(1) 前方にピークがあるが，大角度にも裾を引く分布
α 粒子が中心の原子核の近くを通ると，クーロン反発力により大きく曲げられる。遠いところを通るときは，ほとんど直進する。
(2) 前方にピークがあり，大角度への裾は無い分布
この場合は，芯が無いので，α 粒子はほとんど常に直進する。◇

結果は (1) であった[18]。散乱結果からラザフォードが金の原子核の大きさを計算したところ，$\sim 10^{-14}$ m という値を得た。原子の大きさの 1 万分の 1 という小ささである。そこに，原子の質量の大部分が集中している。質量はエネルギーと等価なので，原子核は巨大なエネルギーを秘めていることになる。

F.3.2　原子核の構造

原子核は，正の電荷をもつ陽子と電荷をもたない中性子とからできていることがわかった。陽子と中性子を総称して核子 (nucleon) という。陽子と中性子は，双子の姉妹のように似た性質をもつ。質量もほとんど同じ (中性子の方がわずかに重い) で，電荷を有するか有しないかだけが大きな違いである。

質量数 (mass number)A，原子番号 (atomic number)Z の原子核の中には，Z 個の陽子と $(A-Z)$ 個の中性子とがある。原子核の表し方として，Z に対応する元素記号の左上に質量数 A を書いて示す。たとえば，α 粒子は ^{4}He と書く。すなわち 2 個の陽子と 2 個の中性子とから成る。

原子番号が同じで質量数が異なる (すなわち中性子数が異なる) 元素を同位元素 (isotope) という。元素の化学的性質は電子の数で決まるので，同位元素の化学的性質は同じで質量のみが異なる。したがって，化学分析した元素には一般に同位元素が何種類か含まれていて，原子量 (atomic weight)[19]が半端な数と成っている。

[17]Rutherford, Sir Ernest (イギリス，1871-1931) ニュージーランドに生まれ育ち 1895 年に渡英。原子が永久不滅ではないことを初めて示すなど，放射性元素の研究で大きな成果を挙げた。
[18]希ではあるが後方に散乱される α 粒子があることを見てラザフォードは,「大砲の弾 (重い α 粒子) が跳ね返されてくるとは！」と驚いたという。
[19]1 mol の元素の質量を g 単位で表した無次元の量。

例題 F.16 核子の質量
アボガドロ数 (6.0×10^{23}) 個の炭素原子 (原子核が ^{12}C) の質量を 12 g と定めている。核子の質量を概算しなさい。

[解] 電子の質量 (と束縛エネルギー) は無視できる。^{12}C 原子核には 12 個の核子があるので，核子 1 個の質量を m とすると

$$m = \frac{12\ \mathrm{g}}{12 \times (6.0 \times 10^{23})} \simeq 1.7 \times 10^{-24}\ \mathrm{g} \tag{F.87}$$

となる。◇

原子核内の陽子同士は，正電荷により互いに強いクーロン反発力を受けている。小さな原子核としてまとまっているためには，それに打ち勝つ引力がはたらいていなければならない。それが核力 (nuclear force，強い力 (strong force) ともいう) である。

F.3.3 原子核の安定性と放射性元素

質量数 A の原子核の安定性について考えよう。質量が大きいほどエネルギーが高い ($E = mc^2$)。エネルギーの高い原子核は，より低いエネルギーの原子核に変わろうとする。そのとき，α 線，β 線，γ 線を出すので放射性元素となる。α 崩壊では α 粒子，β 崩壊では電子 (または陽電子)，γ 崩壊ではガンマ線 (エネルギーの高い光子) が放出される。以下，質量数 A，原子番号 Z の原子核を ^{A}Z と書こう。

1. α 崩壊
   A が大きい原子核では，α 粒子を放出してより安定な原子核に移る。式で書くと

$$^{A}Z \rightarrow ^{(A-4)}(Z-2) + ^{4}\mathrm{He} \tag{F.88}$$

   と書ける。両辺で質量数 (A) の和，原子番号 (Z) の和が同じである (保存している) ことがわかる (重粒子数保存則，電荷保存則)。

例題 F.17 α 崩壊が起こる条件
α 崩壊が起きるために必要な，質量に関する条件式を書きなさい。ここで，それぞれの質量を $m(^{A}Z)$ 等として表しなさい。

   [解] 質量 m の原子核はエネルギー $E = mc^2$ の状態にある。エネルギー的に崩壊が可能であるためには，左辺の質量が右辺の質量の和より大きくなければならない。したがって，

$$m(^{A}Z) > m(^{(A-4)}(Z-2)) + m(\alpha)\ [\mathrm{kg}] \tag{F.89}$$

   が要求される。◇

2. β 崩壊
   β 崩壊では A は変わらない。その質量 m_A(静止エネルギー) は陽子の個数 Z によって変化し (Z の関数であり)，近似的に，下に凸の放物線で与えられる (図 F.4 [20]。Z

[20] 図 F.4 は A が奇数の場合であり，A が偶数の場合は二重の放物線となる。このとき，Z が偶数の場合の曲線の方が奇数の場合の曲線よりも下 (より安定) になる。

は整数なので，最小点に一番近い Z の原子核が安定であることがわかる。この質量より大きい原子核はどうなるのだろうか。

図 F.4 の安定原子核より Z が大きい原子核は，陽子を中性子に変えてより安定な原子核に落ち着く。このとき，陽電子を放出する (β^+ 崩壊)。逆に安定原子核より Z が小さい原子核では，中性子を陽子に変えてより安定な原子核に落ち着こうとする (β^- 崩壊)。式で表すと

$$^{A}Z \rightarrow ^{A}(Z \pm 1) + e^{\mp} + \nu \tag{F.90}$$

と書ける (電荷保存則が成り立っていることがわかる)。ここで ν はニュートリノと呼ばれ，e^+ や e^- とともに生成される粒子である。

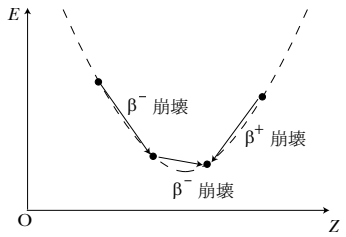

図 F.4: 質量数が A の原子核の質量 (静止エネルギー) と Z の関係，および $\beta^{\pm}$ 崩壊

3. γ 崩壊
A, Z は同じであっても励起された原子核は通常，γ 線を出して基底状態 (一番低いエネルギー状態) の原子核に落ち着く。α 崩壊，β 崩壊後の原子核は一般に励起状態 (高いエネルギーレベル) にあり，γ 崩壊により基底状態に落ち着く。

例題 F.18 放射性元素の減衰
放射性元素の数は時間とともに減少する。時刻 t での数を $N(t)$ とすると

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{F.91}$$

と表されることを示しなさい。ここで $N_0 = N(0)$，τ は平均寿命と呼ばれる。

[解] 放射性元素の崩壊はランダムに起こり，時刻 t と $t + \Delta t$ との間に崩壊する元素の数 ΔN は，そのときそこに存在する元素の数 $N(t)$，および微小時間 Δt の積，すなわち $N(t)\Delta t$ に比例する。時間の次元をもつ定数を τ と置いて，

$$\Delta N = -N(t)\frac{\Delta t}{\tau} \tag{F.92}$$

と書ける。負符号は，数が時間とともに減少することを表す。$\Delta t \rightarrow 0$ にすると，(F.92) は微分方程式となり，その解は (F.91) となる (解法については B.4 節を参照)。◇

問題 F.16 平均寿命の意味
τ が平均寿命と呼ばれる理由を説明しなさい。⋈

問題 F.17 半減期
放射性元素の個数が半分になる時間を半減期 ($T_{1/2}$) と呼ぶ。$T_{1/2}$ と τ の関係を求めなさい。⋈

F.3.4 原子力エネルギーと放射線

自由な陽子は安定である (なぜかについては F.4 節参照) が，自由 (原子核内に束縛されていない) 中性子は，次の反応で崩壊する。

$$n \to p + e^- + \nu \tag{F.93}$$

それではなぜ，安定原子核内の中性子は崩壊しないのだろうか。それを説明する鍵は「質量欠損」である。すなわち，原子核内の核子 (中性子と陽子) は，自由な核子より質量が小さくなっている。${}^AZ$ の原子核については

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{A_Z} > 0 \ [\mathrm{kg}] \tag{F.94}$$

となっている。つまり，Z 個の陽子と $(A - Z)$ 個の中性子から ${}^AZ$ ができるときに，Δmc^2 の余分なエネルギー (束縛エネルギー (binding energy)) を放出する。これが核融合エネルギーである。

太陽の中では実効的に

$$4p \to {}^4\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu + \text{エネルギー} \tag{F.95}$$

が起きていて，輝き続けている。

核子あたりの質量欠損 $\frac{\Delta m}{A}$ は Z とともに大きくなり，$Z = 26$(鉄) 付近で最大値となる。それ以上の Z では核子あたりの質量欠損は小さくなり，やがて原子核を作れなくなる。このように，安定な原子核は A と Z で決まり，全体で同位元素を含めて数百種類くらい存在する。

^{235}U などの重い元素は不安定で，遅い中性子を吸収すると，数個のより軽い元素に分裂する (核分裂 (nuclear fission)) このとき放出されるエネルギーが核分裂エネルギーで，原子力発電のエネルギー源となっている[21]。たとえば (教科書 p172(11.39)),

$${}^{235}\mathrm{U} + n \to {}^{95}\mathrm{Y} + {}^{139}\mathrm{I} + 2n + 3.2 \times 10^{-11}\ \mathrm{J} \tag{F.96}$$

のように分裂する。そのとき生成されるのが放射性廃棄物で，^{137}Cs や ^{90}Sr などは約 30 年の半減期をもつ。

表 F.1 に放射能関係の単位をまとめる。1 年間に浴びる自然放射能は約 1 mSv で，短時間に数百 mSv 以上浴びると，吐き気，脱毛などの即発性疾患や死の危険にさらされる。また，浴びた放射能の量とともに癌など晩発性の疾患を発症する可能性が高くなる。

表 F.1: 放射能関係の単位 (SI 単位系)

単位	記号	SI 単位系	意味
ベクレル	Bq	s^{-1}	1 秒間の崩壊数
グレイ	Gy	J/kg	物質 1 kg 当たりに吸収されたエネルギー
シーベルト	Sv	J/kg	Gy に生物学的危険度の因子を乗じたもの

[21] 地球内部の熱の半分程度も放射性物質の崩壊によって生成されていると言われている。

F.4　素粒子物理学

陽子や中性子は，さらに何からできているのであろうか。電子や光子はどうだろうか。なぜ陽子は壊れないのだろうか。なぜ素粒子物理学は高エネルギー物理学と呼ばれるのだろうか。素粒子物理学は，どこまで解明され，何を目指しているのだろうか。この節では，このようなことを概観しよう。

F.4.1　素粒子の大別

陽子 (proton) や中性子 (neutron)，電子 (electron) などを，素粒子 (elementary particles) と呼ぶ。しかし陽子や中性子は，後述のように，さらに基本粒子からできていることがわかった。しかしながら，ここでは昔ながらの「素粒子」という名称を用いる。

湯川[22]は 1934 年，核力が素粒子の交換によって生じると考え，π 中間子の存在を予言した。π 中間子は 1937 年に発見され，以後次々と新粒子が発見された。現在では数百にのぼる素粒子が知られる。これらの素粒子は，人類が男女に分けられるようにフェルミ粒子 (フェルミオン (fermion)) とボース粒子 (ボソン (boson)) とに大別される。それは，2 つの同一素粒子が互いに区別できないという事実に起因する。

例題 F.19 粒子の入れ替えに対する対称性
2 つの同一粒子が状態 1 と 2 にあるときの波動関数を $\psi(1,2)$ とするとき，

$$\psi(2,1) = \pm\psi(1,2) \tag{F.97}$$

を満たすことを示しなさい。

[解] 粒子が状態 1 と 2 にある確率は $|\psi(1,2)|^2$ で与えられ，粒子が互いに区別できないのだから

$$|\psi(2,1)|^2 = |\psi(1,2)|^2 \tag{F.98}$$

である。したがって

$$\psi(2,1) = \eta\psi(1,2),\ |\eta|^2 = 1 \tag{F.99}$$

と書ける。η は位相因子である。1,2 の状態の粒子は互いに区別できないのだから

$$\psi(1,2) = \eta\psi(2,1) \tag{F.100}$$

とも書ける。(F.100) でさらに粒子を入れ替えると

$$\psi(1,2) = \eta\psi(2,1) = \eta^2\psi(1,2) \tag{F.101}$$

であるから，$\eta = \pm 1$ で (F.97) を得る。◇

同一粒子の入れ替えに対し，波動関数が符号を変えるとき，粒子はフェルミ-ディラック[23]統計に従うと言い，粒子をフェルミ粒子 (フェルミオン) という。符号を変えない粒子

[22]湯川秀樹 (日本，1907-1981) 中間子論による核力の説明と中間子の存在の予言の功績によって，1949 年日本人初のノーベル賞に輝き，戦後の混乱期の日本人に大きな自信と希望を与えた。

[23]Dirac, Paul Adrien Maurice (イギリス，1902-1984) シュレディンガー方程式を相対論的にしようとする努力の中で，フェルミ粒子が従うディラック方程式を 1928 年に導出した。その方程式を解くと負のエネルギーの解が存在し，紆余曲折の末，これは反粒子を表しているというけつろんに達した。

はボース[24]-アインシュタイン統計に従うと言い，粒子をボース粒子 (ボソン) という。

フェルミ-ディラック統計に従う粒子は，次のパウリ[25]の排他律に従う。

問題 F.18 パウリの排他原理

フェルミ粒子は，同一状態に 1 個の粒子しか入れないこと (パウリの**排他原理** (exclusion principle)) を導きなさい。⋈

一方ボース粒子は，同じ状態にいくらでも入ることができる。偶数個の同一フェルミ粒子は，１つのボース粒子として振る舞う。低温 (低エネルギー領域) では，基底状態に多数ボース粒子 (同一フェルミオン対) が凝縮することができる。これが，超伝導や超流動などのふしぎな現象が起きる本質的理由である。

例題 F.20 粒子の分配

2 つの箱 (状態) があり，2 個の同一粒子がある。粒子が

(1) 互いに区別できるとき
(2) ボソンのとき
(3) フェルミオンのとき

について，2 個の粒子がとりうる状態を示しなさい。

[解] 箱を ( ) で示そう。

(1) 2 つの粒子を a, b とするとき
$(a,b)()$, $(a)(b)$, $(b)(a)$, $()(a,b)$ の 4 つの状態が許される。
(2) ボソンを b で表すと
$(b,b)()$, $(b)(b)$, $()(b,b)$ の 3 つの状態が許される。
(3) フェルミオンを f で表すと
$(f)(f)$ の状態しか許されない。◇

粒子はそれぞれ固有の量子数 (質量，寿命，電荷，スピン等) で区別される。このうちスピンは自己角運動量とも呼ばれ，$\hbar$ の整数倍か半整数倍が許される。ボソンは $\hbar$ の整数倍，フェルミオンは $\hbar$ の半整数倍のスピンをもつ。

表 F.2: 素粒子の大別

粒子	状態 1,2 の入れ替え	スピン ($\hbar$)	同じ状態に同一粒子が
フェルミオン	$\psi(2,1) = -\psi(1,2)$	半整数	1 個だけ入れる
ボソン	$\psi(2,1) = +\psi(1,2)$	整数	何個でも入れる

問題 F.19 角運動量の単位と $\hbar$

角運動量の単位と $\hbar$ の単位は一致することを示しなさい。⋈

[24]Bose, Satyendra Nath (インド，1894-1974) アインシュタインに論文を送り，アインシュタインがそれを発展させて，ボース- アインシュタイン統計の概念を完成させた。

[25]Pauli, Wolfgang (オーストリア，1900-1958) 20 歳で相対性理論の優れた教科書を著すなど活躍したが，厳しく辛辣な批判により多数のアイデアをつぶしたことでも有名。

F.4.2　反粒子と CPT 定理

全ての粒子には，反粒子 (antiparticle) が存在する。粒子と反粒子の量子数は，絶対値は等しく符号は逆である。このことは，CPT 定理 (CPT theorem) によって証明されている。C は荷電変換で，粒子 $\leftrightarrow$ 反粒子の入れ替え，P は空間反転 ($\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$)，$T$ は時間反転 ($t \to -t$) を意味する。これら個々の変換に対し，自然が不変ではないことが知られている。しかしながら，これらの積である CPT 変換に対して自然は不変であり，その帰結として，粒子と反粒子の間の完璧な対称性が導かれる。

たとえば，電子 (e^-) の反粒子は陽電子 (e^+) で，質量は等しく，電荷が逆である。陽子 (p) の反粒子は反陽子 ($\bar{p}$)，中性子 (n) の反粒子は反中性子 ($\bar{n}$) である。陽子や中性子は，重粒子数という量子数をもっている。中性子や反中性子は電荷はゼロであるが，反中性子は重粒子数が負であるため，中性子とは異なる。

粒子と反粒子が同一粒子である粒子もある。

問題 F.20 粒子=反粒子である粒子の条件

粒子と反粒子が同じ粒子であるための条件を求めなさい。またその例を挙げなさい。⋈

F.4.3　素粒子の分類

素粒子が感じる力は 4 種類ある (表 F.3) [26]。その 4 つの力全部を感じる粒子をハドロン (hadron) という。続々と発見された粒子はハドロンで，前述のようにボソンとフェルミオンに分けられる。それぞれ中間子 (メソン (meson))，重粒子 (バリオン (baryon)) と呼ばれる。表 F.4 にハドロンの例を挙げる。

素粒子の中には，陽子のように安定 (10^{34} 年以上の寿命) なものもあるが，ほとんどの粒子は $10^{-22}s$ という短い寿命をもち，あっという間に壊れてしまう。寿命を決める重要な要素が質量や感じる力と保存則である。質量が大きいことはエネルギーが高いことを意味する。そのため，重い粒子は一般に不安定である。光子は，質量がゼロでこれ以上壊れようが無いので安定である。

電子は，電荷をもっている粒子の中で一番軽い。これ以上崩壊しようにも，電荷をもつさらに軽い粒子が存在しないので，電荷保存則が破れない限り崩壊できない。電荷保存則は厳密に成り立っている (破れている証拠は見つかっていない) ので電子は安定である。

陽子は，電子の約 1800 倍の質量をもつ。それがなぜ安定なのか。それは，重粒子数保存則によると考える。陽子は重粒子の中で一番軽い。電子のときと同様に，重粒子数保存則を破らない限り崩壊できない[27]。

数百種類におよぶハドロンが基本粒子であるはずがない。研究の結果，ハドロンは，クォーク (quark) というさらに基本的な粒子からできていることがわかった。クォークのスピンは $\frac{1}{2}\hbar$ で，フェルミオンである。基本的には，重粒子は 3 つのクォークから，中間子はクォークと反クォークからできている。クォーク間にはたらく強い力を媒介する粒子は，グルーオン (gluon) と呼ばれる。

電荷は正か負の 2 種類だが，クォークには 3 つの「色電荷」があり,「無色」の色電荷の粒子のみが観測されるとする。色電荷には「赤」「緑」「青」の 3 原色がちょうど無色透明になるように，重粒子は 3 色の 3 つのクォークからできているとする。中間子は，たとえば赤と反赤で無色となる。

[26] 重力は弱すぎるので，素粒子間の相互作用を考えるとき通常は無視する。

[27] 陽子の崩壊を発見しようとした実験が神岡実験であり，その破れは発見できなかった。しかしながら，超新星爆発からのニュートリノを人類史上初めて観測したり，ニュートリノが質量をもつ証拠を発見するなど大きな成果を挙げた。

表 F.3: 4 つの力と粒子 (○：力を感じる，×：力を感じない)

力	説明	到達距離	粒子		
			ハドロン	荷電レプトン	ニュートリノ
核力 (強い力)	原子核を結びつける力	$\sim 10^{-15}$ m	○	×	×
電磁力	電荷間にはたらく力	∞	○	○	×
弱い力	$\beta^{\pm}$ 崩壊等を起こす力	$\sim 10^{-15}$ m	○	○	○
重力	万有引力	∞	○	○	○

表 F.4: ハドロンの例

ハドロン	スピン ($\hbar$)	例
重粒子	半整数	$p, n, \Lambda^0, \Sigma^{\pm}, \Sigma^0, \Delta^{++}.\Delta^{+}, \Delta^0$
中間子	整数	$\pi^0, \pi^{\pm}, K^0, K^{\pm}, \rho^0.\rho^{\pm}, \omega, \phi^0$

自然界では，直接的に観測できる粒子は「無色」の粒子に限られるので，クォーク自身を取り出すことはできない。またグルーオンは 8 個の色電荷をもつ。クォークには 6 種類あることがわかった。

一方，電子は強い力は感じない。また，ニュートリノは電磁力も感じない。電子やニュートリノのスピンは $\frac{1}{2}\hbar$ で，フェルミオンである。これらの粒子を軽粒子 (レプトン (lepton)) といい，同じく 6 種類みつかった。重粒子数と同様に軽粒子数保存則も成り立つことが分かっている。これらが物質を構成する基本粒子である (表 F.5，F.6)。これら粒子間の力を媒介する粒子を，ゲージ粒子 (gauge boson) という (表 F.5)。

最後に，これらの粒子に質量を与える機構 (ヒッグス機構 (Higgs mechanism)) の名残りのヒッグス粒子 (Higgs boson) があり，これらを記述する理論を標準理論 (standard model) という。ヒッグスボソンは標準理論の中で唯一未発見の粒子であり，その発見が待たれている[28]。

表 F.5: 基本粒子

種類	粒子	スピン ($\hbar$)	色電荷	備考
物質構成粒子	クォーク (q)	$\frac{1}{2}$	3 色	u, d, c, s, t, b の 6 種類
	レプトン	$\frac{1}{2}$	無色	$e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$ の 6 種類
ゲージ粒子	グルーオン (g)	1	8 色	強い力を媒介
	光子 (γ),$W^{\pm}, Z^0$	1	無色	電磁弱相互作用を媒介
ヒッグスボソン	H^0	0	無色	質量生成名残りの粒子

[28]2012 年 7 月 4 日，CERN の LHC での実験でヒッグスボソンらしい新粒子が見つかったという報告がなされた。本当にヒッグスボソンとしての性質を持っているのかなど詳細な解析が待たれる。

表 F.6: クォークとレプトン

基本粒子	電荷	世代 1	世代 2	世代 3	色電荷
クォーク	$\frac{2}{3}e$	u	c	t	3 色
	$-\frac{1}{3}e$	d	s	b	3 色
レプトン	0	ν_e	ν_μ	ν_τ	無色
	$-e$	e	μ	τ	無色

F.4.4　加速器の発展

超ミクロ (10^{-15} m) の世界を探るために，次々と高いエネルギーの加速器がつくられてきた。素粒子物理学は，別名，高エネルギー物理学ともいう。なぜミクロの世界の探求に高エネルギー加速器が必要なのだろうか。その鍵はド・ブローイの関係式 $\lambda = \frac{h}{p}$ ((F.12)) である。すなわち，運動量 p (したがってエネルギー E) が大きいほど波長は小さくなる。小さいものを調べるには，波長の小さい粒子を用いる必要がある。そのため，次々とより高いエネルギーに粒子を加速する加速器がつくられてきた。

加速器は，電磁力を用いて粒子を加速する。なぜ，強い力などが利用できないのだろうか。それは，表 F.3 のように，力の到達距離が極端に短いからである。無限遠まで届く力としては他に重力があるが，重力で加速するには力があまりに弱すぎる。それで電磁力が使われる。

例題 F.21 加速可能な粒子の条件
加速器を用いて加速できる粒子には，どのような性質が必要か?

[解] 電磁力を用いるために，電荷をもつ粒子でなければならない。また，加速する途中で壊れてしまわないように，安定な粒子である必要がある。その条件を満たす素粒子は，陽子と電子，およびその反粒子だけである。◇

例題 F.22 加速エネルギー
静止していた電荷 e，質量 m の粒子が，電圧 V の間で加速された。粒子が得た運動エネルギーと速さを求めなさい。

[解] 速さを v とすると，粒子が得た運動のエネルギーは $|e|V$ で与えられるので，$\frac{1}{2}mv^2 = |e|V$ が成り立つ。したがって，

$$v = \sqrt{\frac{2|e|V}{m}}\ [\mathrm{m/s}] \tag{F.102}$$

を得る (非相対論的領域)。◇

上の例で見るように eV(電子ボルト) はエネルギーの単位であり，$E = mc^2$ の関係式から eV/c^2 は質量の単位をもつことがわかる。質量の単位として MeV/c^2 などがよく用いられる。

問題 F.21 電子の質量

電子の質量は 0.51 MeV/c^2 である。これは何 kg か。ただし，$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C，$c = 3.0 \times 10^8$ m/s である。また 1 CV=1 J である。⋈

問題 F.22 陽子の加速

1 MV で加速された陽子の速さは光速の何倍かを求めなさい。ただし，陽子の質量は 938 MeV/c^2 である。⋈

例題 F.23 磁場中での粒子の運動

磁束密度の大きさが B[T] の磁場中に，磁場に垂直に入射した電荷 e，運動量 p の粒子は半径 $\frac{p}{|e|B}$ の円を描くことを示しなさい。

[解] 粒子の速さを v とすると，常に進行方向に垂直に evB のローレンツ力を受ける。これは一定の中心力を受ける粒子の運動と同じである。半径を r とすると，遠心力 $\frac{mv^2}{r}$ とローレンツ力はつり合うので

$$\frac{mv^2}{r} = |e|vB \text{ [N]} \tag{F.103}$$

よって粒子は，半径

$$r = \frac{mv}{|e|B} = \frac{p}{|e|B} \text{ [m]} \tag{F.104}$$

の円を描く。◇

加速器は，このように電場で加速し，磁場で曲げ，リングの中を回して加速する。

問題 F.23 高真空ビームパイプ

加速管の中は超高真空に保たねばならない。その理由を説明しなさい。⋈

加速器は，年とともにエネルギーを増してきた。やがて限界が来た。そこで 1970 年代から，粒子衝突型加速器 (colliding beam accellerator) が建設されるようになった。互いに加速された粒子を正面衝突させる加速器である。それまでの加速器では，加速した粒子を静止標的に衝突させていた。

例題 F.24 粒子衝突型加速器と従来型加速器実験の実効エネルギー

粒子衝突型加速器では，質量 m の粒子を E^* まで加速し，互いに正面衝突させる。これに対して，従来型加速器での実験，すなわち $E_{\rm lab}$ まで加速された粒子を静止している質量 m の粒子に衝突させて，同じ実効エネルギーを得るとき，$E_{\rm lab}$ と E^* の関係を求めなさい。ただし， $E^* \gg mc^2$ としてよい。

[解] 入射粒子と標的粒子の 4 元運動量を p_1,p_2 とする。加速が x 方向とすると，正面衝突 (重心系 (center of mass system)) では*をつけて，$p^*c \simeq E^*$ より

$$\begin{aligned} p_1 &= (\frac{E^*}{c}, \frac{E^*}{c}, 0, 0) \text{ [kg·m/s]} \\ p_2 &= (\frac{E^*}{c}, -\frac{E^*}{c}, 0, 0) \text{ [kg·m/s]} \end{aligned} \tag{F.105}$$

と書ける。静止標的の系 (laboratory system) では

$$\begin{aligned} p_1 &= (\frac{E_{\rm lab}}{c}, \frac{E_{\rm lab}}{c}, 0, 0)\ [\text{kg·m/s}] \\ p_2 &= (mc, 0, 0, 0)\ [\text{kg·m/s}] \end{aligned} \tag{F.106}$$

と書ける。$p_1 \cdot p_2$ はローレンツ不変量なので，それぞれの系で計算した値は等しい。静止標的の系では $p_1 \cdot p_2 = mE_{\rm lab}$，重心系では $p_1 \cdot p_2 = \frac{E^{*2}}{c^2} + \frac{E^{*2}}{c^2}$ なので，

$$\frac{2E^{*2}}{c^2} = mE_{\rm lab}\ [(\text{kg·m/s})^2] \tag{F.107}$$

を得る。よって

$$E_{\rm lab} = \frac{2E^{*2}}{mc^2}\ [\text{J}] \tag{F.108}$$

すなわち，粒子衝突型加速器で得られるエネルギーの 2 乗に比例する超高エネルギー加速器に相当する。◇

衝突型加速器は，主にハドロンコライダー (陽子・陽子または陽子・反陽子) とレプトン (電子・陽電子) コライダーとに分けられる。ハドロンコライダーの重心系エネルギーはレプトンコライダーのそれの数十培であるが，衝突する粒子がクォークやグルーオンであり，それらのエネルギーは低いので，実効エネルギーとしては同程度である。

現在，エネルギーフロンティアの加速器として活躍しているのは，CERN(ヨーロッパ原子核研究所) の LHC(Large Hadron Collider) である。デザイン重心系エネルギーは 14 TeV で，現在は 7 TeV であり，少しずつ到達エネルギーや強度を上げて行っている。現在ヒッグスボソンらしい粒子の発見で沸き立っている (F.4.3 節)。

一方，レプトンコライダーは，エネルギーフロンティアの加速器は，世界で協力して造ろうとしているが，なかなか具体化しない。それが具体化するまでの間，強度を従来の 2 桁以上上げて精密実験を志す傾向にあり，日本の高エネルギー加速器研究機構 (KEK) の KEKB (B ファクトリー加速器) がその代表例である。すでに大きな成果を挙げ，さらに強度を上げるべく建設が進められている。

F.4.5　素粒子理論の現状

標準理論は 4 つの力のうち，重力を除く 3 つの力を記述する強力な理論である。現在のところ，その予言と矛盾する結果は見つかっていない[29]。理論をさらに発展させて，重力をミクロの世界での理論に含めたい。できれば，4 つの力を 1 つの力として統一的に理解したい。そんな願望のもと，盛んに研究されているのが超弦理論 (superstring theories) である。重力をも含めようとすると，必然的にそのエネルギー領域は，現在，加速器で到達可能なエネルギー領域の十数桁上のエネルギー (プランクエネルギー) 領域となり，実験で確かめることができない領域である。

問題 F.24 プランクエネルギー

プランクは，重力定数 G と $\hbar$ と c を用いて質量の単位をもつ量をつくった。

$$\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 1.2 \times 10^{19}\ \text{GeV}/c^2 \tag{F.109}$$

この値を確かめなさい。⋈

[29]標準理論では，ニュートリノの質量はゼロとしている。しかし，実験的にゼロでないことがわかった。これは，理論を少し拡張すれば解決できる。

$\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} c^2$ をプランクエネルギーという。超弦理論は，プランクエネルギー領域に潜む 10 次元時空 (空間 9 次元，時間 1 次元) 中の弦の振動により，いろいろな粒子が現れるというものである。重力も，この理論に含まれている。1 次元の弦以外に，多次元の面 (ブレーン (brane) という) も基本的要素であることがわかった。数学的に非常に難しい理論で，理論家の挑戦が続いている。この超高エネルギー領域は，唯一，宇宙初期に存在した。それでこの学問は，宇宙初期を探る手段ともなっている。

F.5 物性物理学

身の周りには様々な性質を持つ物質で満ちている。物質は，温度や圧力の違いによって固体，液体，気体になったりする。なぜ，そのような「相変化 (phase transition)」をするのだろうか。

金属は電気や熱をよく通す。磁石は鉄などを引きつける。なぜそれらの物質は，そのような性質を持つのだろうか。そのようなことを研究し，物理法則により理解しようとするのが物性物理学 (condensed matter physics) である。気体の性質は原子や分子の性質によって理解できる[30]ので，物性物理学の対象は，主に液体と固体 (凝縮体 (condenced matter)) である。

物性物理学では，それらの性質を，主に量子力学と統計力学とを用いて解明しようとしている。

物質は原子や分子からできている。原子が原子核と電子からできていて，原子核は究極的にはクォークからできているが，原子核の構造等の知識は物質の理解には直接役に立たない。すなわち，物質の世界は階層構造をなしており，そのスケールに応じて物理法則を駆使して，その階層での物質を理解する必要がある。

物性物理学での主役は電子であり，電子の性質や振る舞いが，物質の性質や構造を決めていると言っても過言ではない。しかしながら，物質の (とくに低温での) 比熱や金属の電気抵抗などを扱うには，結晶の格子振動を量子化したフォノン (phonon) が重要な役割をする。このことを念頭に置いて，物性物理学の世界を概観しよう。

F.5.1 物質の構造と化学的性質

周期表 (表 F.7) で見るように，百種類余りの原子が知られている。それらは，原子番号 (原子核中の陽子数) で区別される。その周りには，陽子数と同じ数の電子があって，全体として電気的に中性になっている。これらの電子は，通常，エネルギーの一番低い安定な状態にある (基底状態)。すなわち，電子はエネルギーレベルが一番低い順に詰まっていく。パウリの排他原理により，各状態には，スピンの向きが異なる 2 つの電子しか入れない。

原子の構造と化学的性質

ボーアの原子模型によれば，電子はエネルギーレベルの低い順に各軌道に入っていく。量子力学によると，電子の軌道は主量子数 n と，電子の原子核の周りの角運動量 l で区別される。$l = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ の状態を s，p，d，f，g，$\cdots$ 軌道という[31]。

[30] 気体でもプラズマを扱うプラズマ物理学は，通常，別の分野として扱われる。

[31] 19 世紀にスペクトル線の見え方からこれらの名前がついた。s=sharp, p=pure, d=diffuse, f=fazzy。後は g,h, などアルファベット順になる。

表 F.7: 周期表

1																	2
H																	He
3	4											5	6	7	8	9	10
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
11	12											13	14	15	16	17	18
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	60	51	52	53	54
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
55	56	*1	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Cs	Ba		Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
87	88	*2	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118
Fr	Ra		Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cn	Uut	Fl	Uup	Lv	UUs	Uuo
*1 La 系			57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
			La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
*2 Ac 系			89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
			Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

角運動量 l の軌道には $2 \times (2l+1)$ 個の電子が入ることができる。ここで 2 倍したのは，各状態に電子のスピンの 2 つの向きが入ることが許されるからである。$l < n$ の関係があり，$n = 1$ の状態には s のみ，すなわち，1s 軌道には 2 個の電子しか入れない。

いっぱいになった軌道を閉殻 (closed shell) という。すなわち，1s 状態に入れる電子は 2 個までで，He 原子は閉殻となる。$n = 2$ の軌道には 2s と 2p が許され，合計 8 個の電子でいっぱいになる。それが Ne 原子であり，閉殻の原子は不活性である。原子の (化学的) 性質や原子間の結合を決めているのが，外殻電子 (閉殻の外の電子，価電子 (valence electron) ともいう) である。

遷移金属 (transition metal) の Sc から Zn では，3d の軌道に入るべき電子がさらに上の 4s や 4p の軌道に入り，外殻電子となる。原子番号が増えると，外殻電子の数はほとんどそのままで，内側の軌道に電子が入っていく。これは，電子同士の相互作用を考慮に入れると，その方がエネルギー的に得であることによる。外殻電子の数がほとんど同じなので，化学的性質も似ている。遷移金属の Y から Te なども同様である。

さらに，ランタノイド系，アクチノイド系では，外殻電子の数は同じ (La 系は 6s に 2 個，Ac 系は 7s に 2 個) で，内側の殻 (内殻) に電子が詰まって行く。そのため，これらの原子の化学的性質は同じになる。

問題 F.25 金，銀，銅の電子状態

金，銀，銅の外殻電子はそれぞれ 1 個ずつである。各軌道の電子数を答えなさい。ただし，銀は 4f，金は 5f に電子が入らず，その上の軌道に入る。⋈

物質の構造

原子が分子や結晶を作る際の結合には，主にイオン結合，共有結合，金属結合，誘電結合，水素結合の 5 種類がある。結合の主役は外殻電子である。

イオン結合では，正と負のイオンが互いに引き合って結晶を作る。例えば，Na 原子は閉殻の外に 1 個の電子があり，電子を放出した Na^+ イオンは閉殻である。また，Cl 原子は，電子を 1 個もらって Cl^- イオンになり，閉殻となる。したがって食塩 (NaCl) は，電気的に引き合った安定な (単純立方) 結晶となる。

共有結合では，電子を共有し合って安定な分子や結晶を作る。例えば，2 個の水素原子は，お互いに電子を共有して H_2 分子となる。炭素原子は外殻に 4 個の電子，すなわち，4 本の腕を持つ。この 4 本の腕が多彩な有機化合物等を生み出す元となる。ダイヤモンド構造は，もっとも固い結合として知られる。

金属結合では，外殻電子が結晶全体に広がることによって安定な結晶を作る。例えば Na 原子が集まると，各々1 個の外殻電子が，Na^+ イオンの作る格子間を自由に飛び回ることができる (自由電子)。したがって電子の物質波としての波長が長くなり，エネルギー的に低くなる。この自由電子のお陰で，金属は電気や熱の良導体となる。

問題 F.26 電子の閉じ込め

金属内を飛び回っている電子はなぜ金属の外に飛び出してしまわないのだろうか。⋈

誘電結合では，電気双極子 (正負の電荷が分離している) 分子が電気的に引き合って結晶を作る。水分子 (H_2O) は電気双極子となっている。すなわち，H 側が正，O 側が負となっている。1 気圧 0 ℃以下で水分子が集まると氷となる。He 原子など不活性な元素も，極低温で原子が集まるとお互いに電子雲がずれて電気双極子となり，液体や固体になる。この力は，ファンデルワールス力と呼ばれる。

氷の結合力を誘電結合だけで説明するには結合力が足りない。そこで水素結合が登場する。水素結合では，水素の原子核である陽子が分子間で共有されて結合力が生じる。水素結合は，酵素などの生体物質が機能を発揮するのに重要な役割を演じている。

固体は原子や分子が結晶構造を作っている状態，気体は各原子や分子が自由に飛び回っている状態であり，液体はその中間である。結晶は周期性 (同じ単位の繰り返し) を有するが，例えば比較的少数の原子が集まったクラスターでは，5 角対称などを有する準結晶 (quasicrystal) が作られる。液晶画面等で活躍する液晶 (liquid crystal) は，液体と固体の中間の性質を有し，棒状の有機化合物などからなる。

溶けた金属を急冷すると，アモルファス状態 (構造がランダムでガラス状態になったもの) になる。また，サイズの異なる金属原子からは急冷しなくてもアモルファス金属 (金属ガラス) が生成される。金属ガラスは，安定で，強度もある。

F.5.2　電気的性質

金属の電気伝導度が高い理由は，F.5.1 で述べたように自由電子が多数存在することによる (物理学入門，問題 12.5 参照)。これは，エネルギー帯の考えによって，より直接的に理解できる。

1 個の原子における電子のエネルギーレベルは横線で表される。2 個の同一原子が接近すると，各エネルギーレベルは交差し合い，近接した 2 つのレベルになる。たくさんの同一原子が集まると，これらのレベルは近接して帯 (band) のようになる。電子が存在できる

帯を準位帯という。準位帯と次の準位帯との間には電子は存在できず，禁止帯 (forbidden band) と呼ばれる[32]。

閉殻の電子の準位帯は，もともと電子が詰まっていたのだから，これ以上電子は入れない。これを充満帯 (filled band) という。もともと空だったレベルには電子は入れるが，電子は存在していないので空準位帯と呼ぶ。

外殻電子が存在するレベルが帯になると，帯の下から準位帯内のあるレベル (フェルミレベル) まで電子が入っている。すなわち，フェルミレベルまで電子が詰まっていて，金属の場合は，フェルミレベルが準位帯の中ほどにある。これらの電子は，ほんの少しのエネルギーを加えると，そのすぐ上のレベルに移ることができ，簡単に移動することができる。それで電気や熱を容易に運ぶことができる。準位帯のうち，完全に空，または上部が空いている準位帯を伝導帯 (conduction band) と呼ぶ。

半導体

金属でのフェルミレベルは伝導帯の中にあった。半導体 (semiconductor) や絶縁体 (insulating material) では，フェルミレベルは充満帯と空準位帯との間で，禁止帯の中にある。禁止帯の幅 (バンドギャップ) が狭い (1 eV 程度) ものを半導体，広いものを絶縁体と呼ぶ。半導体では，熱励起により，充満帯から伝導帯に少なからぬ電子が励起され，伝導帯に自由電子，充満帯に電子の脱け跡であるホール (hole) が生成される。これらが少量の電気を運ぶことができ，半導体と呼ばれる。

問題 F.27 常温の熱エネルギー

常温での熱エネルギーの大きさはおよそどのくらいか。eV 単位で求めなさい。⋈

半導体中の不純物は禁止帯中にレベルを作り，そこに電子が入っている。例えば非常に純度の高い Si に，N，P，As などの原子を少量混ぜると n 型 (電子を供給する) 半導体となる。N，P，As などの原子は Si より外殻電子の数が 1 個多いため，Si と置き換わると電子を 1 個自由電子として放出できる。空準位帯のすぐ下にレベルができたことになる。これらの不純物をドナー (dpnner) と呼ぶ。逆に p 型 (ホールを供給する) 半導体も作ることができる。

例題 F.25 p 型半導体

p 型半導体はどのように作ればよいか。また，なぜ p 型と言われるのか説明しなさい。

[解] 例えば純粋な Si に B，Al，Ga などの不純物を混ぜると，これらの原子は Si より外殻電子の数が少ないので，電子を捕獲する。すなわち，アクセプター (acceptor) となる。そのエネルギーレベルは充満帯のすぐ上にあり，充満帯中の電子がそのレベルに熱エネルギーにより容易に飛び移れる。充満帯に空いた電子の孔 (hole) は正の電荷の粒子として振る舞う。すなわち，p 型半導体となる。◇

n 型半導体と p 型半導体を接続するとダイオードとなり，整流作用をもつ。

[32] この定性的説明を定量化するためには，結晶の周期性を考慮した電子のシュレディンガー方程式を考える必要がある。すると，電子の波長 (または，運動量) がブラッグ反射条件を満たすとき，電子エネルギーは不連続になり，エネルギーギャップができることがわかる。許される領域が準位帯，ギャップの部分が禁止帯である。

問題 F.28 np 半導体の整流作用
np 結合の半導体が整流作用をもつ理由を説明しなさい。⋈

n 型半導体の間に p 型半導体を挟むと npn トランジスターとなり，増幅作用をもつ。同様に pnp トランジスターも作ることができる。

例題 F.26 npn トランジスターの動作原理
npn トランジスターの動作を説明しなさい。

[解] npn トランジスターの p 部 (ベース (base)) を基準にして，片側の n 側に負電圧 (エミッター (emitter)) をかけ，もう片方の n 側に正 (コレクター (collector)) の電圧を掛ける (バイアス電圧)。すると，エミッター・ベース間はダイオードの順電圧，ベース・コレクター間は逆電圧となる。エミッターから出た電子はベースを抜けると正のコレクター電極に集められる。p 部 (ベース (base)) のわずかな電圧の変化によってエミッターからコレクターに流れる電子の流れが大きく変化する。すなわち，増幅作用がある。◇

その後，FET(field effect transistor) や MOS(metal oxide semiconductor) などのデバイスが開発され実用化された。半導体技術はさらに進化を遂げ，LSI(large scale integration) や超 LSI 化が進んでいる。また，いろいろの色の発光ダイオード，半導体レーザーなども開発された。

超伝導

臨界温度 (T_c) 以下で電気抵抗が厳密にゼロになる超伝導 (superconductivity) は 1911 年カマリング・オネスにより発見された。その機構が理論的に説明されたのは 1956 年バーディン，クーパー，シュリーファー (BCS 理論) によってであった。電子が対 (クーパー対) を作り，ボース粒子のように振舞ってボース・アインシュタイン凝縮する。ボース粒子化することによっていくつでも基底エネルギーに凝縮することができる。この集団が電気抵抗無し (散乱無し) に電気を伝えることができる。

超伝導体を磁場の中に置くと超伝導体内部の磁場はゼロである (マイスナー効果)。これは，超伝導体の表面に磁場を打ち消す方向に電流が流れるからである。超伝導体が作る磁場のため，磁石や超伝導体が浮く現象が磁気浮上 (magnetic levitation) である。

第 1 種超伝導体では，磁場が限界値 (H_c) を超えると常伝導になってしまう。ところが，Nb などの第 2 種超伝導体では，磁場が B_{c1} を超えると磁場が超伝導体の内部に入り始め，B_{c2} で完全に常伝導化する。内部の磁場は量子化され，磁場を上げると量子渦の数が増えていく。第 2 種超伝導体は超伝導磁石の線材として有用であり，活用されている。

問題 F.29 量子化渦
1 本の量子渦は $h/(2e)$ の磁束をもつ。$B_{c2} = 10$ T の第 2 種超伝導体は，1 μm×1 μm の面積当たり何本の量子化渦ができると常伝道化するか。⋈

1986 年ベドノルツとミュラーが 30 K の T_c を持つ酸化物高温超電導体を発見して以来いろいろな化合物が試され，現在のところ，最高の T_c は 100 K を超えている。高温超電導体の機構は現在のところ解明されていない。

F.5.3　磁性

磁性とは，磁場中で磁気を生じる性質のことである。実は，すべての物質は磁性を有する。磁性は，大きく 2 つのタイプに分類される。第 1 のタイプは，磁性が物質を構成する原子やイオンの性質から理解できるものであり，反磁性 (diamagnetism) と常磁性 (paramagnetism) とに分けられる。反磁性は，磁場と逆向きに，常磁性は同じ向きに弱く磁化する。第 2 のタイプは，物質を構成する原子やイオンの相互作用で決まるものであり，強磁性と反強磁性などに分けられる。

ここでも主役は電子であり，電子のスピンである。電子のスピンは，ある方向に対して，同じ向きか逆向きかの 2 つの向きが許される。原子では，通常は電子のスピンが互いに対を成して磁化打ち消し合うが，奇数個の電子では不対電子が残る。不対電子は永久磁石として働く。また，外殻電子の数の偶数個でも，d や f 軌道の電子などは，閉殻電子数の半分まではスピンの向きが同じ方がエネルギー的に低くなり，これらの電子も不対電子と考える。

例題 F.27 反磁性
不対電子をもたない原子は反磁性を示す。そこではレンツの法則が働いている。反磁性をもつ理由を説明しなさい。

[解] 動いている電子は磁場中でローレンツ力を受け，磁場に垂直な面内では円運動をする。円電流は磁場を作るがその向きはレンツの法則により磁場を弱める方向，すなわち，反磁性を示す。不対電子をもたない原子中の電子も同様に振舞い，反磁性を示す。◇

常磁性では，不対電子のスピンが磁場の向きに揃った方がエネルギー的に得であるために生じるが，熱運動で乱される。したがって磁化率は温度によっても変わる。

第 2 のタイプの物質では，各原子やイオンのスピンがお互いに揃う向きに相互作用が働く場合に強磁性体 (ferromagnetic material) となり，お互いに打ち消す向きに働く場合に反強磁性体 (antiferromagnetic material) となる。遷移元素の 3d や 4f 軌道の電子のスピンは，電子の数が閉殻に達する半分の数まではスピンが揃った方が安定である。そのため，原子の磁気モーメントは大きくなる。例えば Fe^{3+} イオンは 3d に 5 個の電子のスピンが揃って存在し，強磁性の原因となる。Co や Ni も同様である。

強磁性体の場合，小さな領域 (磁区 (magnetic domain)) の中では磁化の向きが揃っている。しかしながら，全体としてはそれぞれの磁区の向きが打ち消し合って全体として磁化がないときがエネルギー的に安定となる。磁場を強くしていくと個々の磁区の磁化が磁場の向きに揃っていき，最後はすべて揃い，永久磁石となる。続いて磁場を弱くしていくと，磁化曲線は別の曲線をたどる。すなわち，ヒステリシスを示す。

F.5.4　新しい展開

20 世紀の前半の物性物理学は，アボガドロ数の物質，すなわちマクロのサイズの物質を理解することに大きな成果を挙げてきた。最近は超 LSI 技術の進展などとともに，より微細な構造や性質を探ることが主流となっている。また，新技術の開発より極限的な状態での物質の物性の研究も進められ，極限のフロンティアが押し広げられている。

また，最近の計算機能力の向上に伴って，第一原理 (基本的な物理学法則) から計算機シミュレーションによって複雑な系を理解しようという動きも盛んである。

生物も分子からできているのだから，物理法則で理解できるはずとの信念から，生物物理学の進歩も著しく，たんぱく質や酵素などの構造や働きを物理的手段やアプローチで成果を挙げている。生物物理学は，現代では独立の分野として考えられている。

ナノの世界

超LSIの技術等がさらに微細化し，ナノ (10^{-9} m) の世界に届いている。そこでは，STM(scanning tunnel microscope) 等の発明や改良により，原子1個1個が直接見えるようになり，また，原子1個1個を操作することも，超格子を作製することも可能になった。また，マクロとミクロの中間のサイズ (mesoscopic size) や表面の構造，性質等が注目を浴びるようになった。そこでの科学が象徴的にナノ科学と呼ばれる。

微細加工技術を生かした量子ドット (quantum dot) の製作により，人工原子を作成し，量子力学の諸問題を実験で確かめられる時代になった。また，それを発展させて，単電子素子を作成したり，量子コンピュータを実現させようという大きな流れもある。スピントロニクス (spintronics) という言葉も盛んに用いられている。そこでは，1個1個の電子スピンをも電子デバイスとして利用しようという考えである。

新素材や新研究対象として，フラーレン (fullerene) や CNT(carbon nano tube) が脚光を浴びている。その物性は興味深く，また，CNT は強度的に最強といわれる。フラーレンとして最初に発見されたのは C_{60} で 60 個の炭素原子が球状に結びついている。CNT はその名の通り，炭素シートが円筒形になってでできたナノサイズの直径の物質であり，いろいろな直径や構造のものが発見，解析されている。また，フラーレンや CNT の内部に原子や分子を閉じ込めてその物性を研究することも新しい流れである。

フラーレンは，C_{60}，C_{70}，C_{76}，C_{78}，C_{82}，C_{84}，C_{90}，C_{96}のように特定の数の炭素原子数のときに形成され，中には炭素原子数が数百に及ぶものもある。C_{60} は負イオンになりやすく，例えば KC_{60} ができる。この化合物は T_c が 20 K を超す超伝導も示す。

炭素だけでなく，層状化合物である BN，BC_2N，MoS_2 などもナノチューブを作ることがわかってきた。

極低温の世界

超伝導のほかに，極低温では興味ある現象が発見されている。超流動 (super fluidity) は，粘性が厳密にゼロとなる (物理学入門 p115 休み時間参照)。^{4}He に続いて ^{3}He もミリ K で超流動を示すことが発見された。^{3}He は全体としてフェルミ粒子であるが，クーパー対のように 2 つの ^{3}He が対になってボース・アインシュタイン凝縮を起こすのである。超伝導は，電子対が超流動状態にある状態と言える。

極低温への技術がさらに進歩し，レーザー冷却などを使用してナノ K まで到達しようとしている。そこでは，いろいろな元素の BEC(Bose·Einstein condencation) 状態が観測，研究されている。

問題 F.30 BEC を起こすための原子の条件

BEC を 1 種類の中性原子集団で起こすためには，原子が全体としてボース粒子である必要がある。そのためには，原子核中の中性子の数にどのような制限がつくか。⋈

超高圧の世界

人工的に到達できた超高圧は 10^{12} Pa(10^7 気圧) で，地球中心部の圧力に相当する。自然界では，中性子星では 10^{20} Pa，さらに，ブラックホールの内部では無限大の圧力となって，人知を超える。超高圧では，かなりの物質が金属に，そして超伝導を示し,「すべての元素を超伝導に」がスローガンの 1 つになっている。

超高磁場の世界

人工的に到達できた超高磁場は 10^3 T 程度である。強磁場中でも，50 T 以上で Si が金属になったり，原子の基底状態が変わったり，と興味ある現象が起きる。自然界では，中性子星では 10^9 T にも達し，そこでの原子は磁場の方向に細長く針状になっていると予測される。それは，電子が磁場方向に細く締めあげられているためである。

F.6　宇宙物理学

私たちの地球は，銀河系の中心から離れた太陽系にある。銀河系には，太陽のように自ら輝く星が数千万個あるという。そして見える範囲の宇宙には，銀河系のような星の集団である銀河が数千万個あると言われる。

宇宙の果ては，どこで，どうなっているのだろうか? 宇宙はどのように始まり，どう発展していくのだろうか。気が遠くなるように広大で永久とも思える宇宙の生成，発展も，科学で理解できる時代に私たちはいる。この節では，宇宙について概観しよう。

F.6.1　ビッグバン宇宙

宇宙は大きい。星や銀河への距離の単位として，光年 (ly) や pc[33](パーセク) が主に用いられる。

問題 F.31 1 光年

1 光年は，光が 1 年かかって進む距離である。

$$1\ \mathrm{ly} \simeq 9.46 \times 10^{12}\ \mathrm{km} \tag{F.110}$$

を導きなさい。⋈

問題 F.32 pc と光年の関係

1 pc の距離とは，天体から地球の公転半径 (約 1.5×10^8 km) を見込む角度が 1 秒角になる距離を言う。

$$1\ \mathrm{pc} \simeq 3.26\ \mathrm{ly} \tag{F.111}$$

を示しなさい。⋈

宇宙はこれまで，いろいろな波長の光で調べられてきた。x 光年離れた天体からの光は x 年前に放出されたことになり，私たちは遠くの天体ほど，それだけ遠い過去の宇宙を見て

[33]parallax second，parallax とは視差のことで，左右の眼で近くの物を交互に見ると，遠くの背景に対してその物が動いて見えることがその例である。second は 1 秒角のことである。

いることになる。天体への距離は，いろいろな方法によって決められて来た。1929 年ハップル[34]は，地球から遠い銀河ほど速く後退していることを発見した。膨張宇宙 (expanding universe) の発見である。式に表すと

$$v = H_0 r \ [\mathrm{m/s}] \tag{F.112}$$

と書ける。ここで v は銀河の後退速度，r は銀河までの距離，H_0 はハップル定数と呼ばれ，現在では

$$H_0 \simeq 75 \ \mathrm{km/(s{\cdot}Mpc)} \tag{F.113}$$

と測られている[35]。

問題 F.33 宇宙の果て

(F.112) で $v > c$ の銀河からの光は地球には届かない。すなわち，見える宇宙の果ては，$v = c$ となる距離である。その距離は何光年か。⋈

宇宙が膨張しているということは，過去にさかのぼると宇宙が収縮していき，どんどん小さくなるということである。すると断熱圧縮により，過去に遡るほど熱くなる。すなわち，宇宙は超高エネルギーの火の玉から始まった。これがガモフ[36]らが提唱したビッグバン (Big Bang) 宇宙論である。

問題 F.34 宇宙の始まり

(F.112) によれば，宇宙の始まりは何年前か。⋈

ガモフらは，次の 2 つの予言をした。

(1) 宇宙背景放射の存在
　昔，熱かった名残りの光が宇宙に飛び交っている。その光 (宇宙背景放射) の波長分布は，絶対温度 10 K 程度のプランクの放射公式に従っている。
(2) 初期宇宙での元素合成
　宇宙にあるほとんどの元素は，この宇宙初期に合成された。

この予言は忘れ去られていたが，1965 年，ペンジャスとウィルソンは偶然にこの光を発見した[37]。その後の観測衛星等の活躍で，この光の波長分布は 2.735 K のプランクの放射公式にピッタリ一致するという測定結果が得られた[38]。

また，宇宙初期に全ての元素が合成されたというのは間違いだったが，宇宙初期 (最初の 3 分間!) にヘリウム等の軽い元素が合成されたことは確かであると信じられている。より重い元素は，星の中で合成され，超新星爆発で宇宙空間にばらまかれたと考えられている。

[34] Hubble, Edwin Powell (アメリカ，1889-1953) 弁護士の資格も取ったが天文学に転向。天体までの距離を測る技術を駆使し，渦状星雲が銀河系内の天体ではなく，銀河系外の銀河系と同等の銀河であることを確立した。人工衛星に搭載されたハッブル望遠鏡はハッブルに因む。

[35] 最近の精密測定値では，73.8 km/(s·Mpc) とのことである。

[36] Gamow, George (ロシア，アメリカ，1904-1968) 量子力学のトンネル効果の理論的研究で有名になった。一般大衆向けの「トムキンスの不思議な冒険」などの啓蒙書でも有名。

[37] 二人は天のあらゆる方向から来るバックグランド電波に悩まされていた。それが宇宙背景放射であった。

[38] 実は，この値は，地球が宇宙背景放射に対して毎秒数百 km という高速度で動いている効果を補正した値である。さらに，現在地球で観測している宇宙背景放射は，約 137 億年前 (宇宙誕生から約 38 万年後) に地球に向けて放たれたもので，同一の温度になっている保証は全く無いはずであった。宇宙背景放射の温度がほとんど同じであることなどを説明するために，宇宙誕生のごく初期に宇宙が指数関数的に膨張 (インフレーション) したと考えられている。

F.6.2　ダークマターと宇宙の構造

宇宙には「見えない物質」(ダークマター，暗黒物質 (dark matter)) が相当量分布し，銀河の生成や分布に大きく関わっていることがわかってきた。その一つの証拠が，銀河の周りの粒子の回転速度である。「銀河の周りを回る粒子の回転速度は，銀河中心からの距離に無関係にほぼ一定である」ことが多くの銀河で明らかにされた。しかも，星が見えないような銀河中心から離れた距離までその関係が成り立っている。

例題 F.28 質量 M の周りを回る物体の速さ
質量 M の物質の周りを回る物体の速さ v を，中心からの距離 r の関数として表しなさい。

[解] 物体の質量を m とすると，遠心力と万有引力のつり合いから

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \text{ [N]} \tag{F.114}$$

すなわち

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \text{ [m/s]} \tag{F.115}$$

となり，$M =$ 一定 ならば $v \propto r^{-\frac{1}{2}}$ である。◇

$v \simeq$ 一定 ということは，$M \propto r$ で，距離とともに質量が増加していることを意味する。すなわち，見えないが質量をもつ物質が満ちていることを意味する。そこには何も見えるものは無いので，質量をもつダークマターが存在していると考えられる。現代では重力レンズ効果[39]などの観測により，銀河の周りにダークマターが分布していることが分かっている。

ゲラー (M. Gellar) らは，銀河の分布の 3 次元地図を作成し，銀河の分布が泡構造をなしていることを発見した。泡の中心部にはほとんど銀河は存在せず，泡の殻部分に銀河が密集している。このような構造は，宇宙初期のダークマターの分布の揺らぎで生じることが計算機シミュレーションで明らかになっている。

ダークマターの正体は何だろう？　2 つのシナリオが考えられる。

(1) 自らは光らない小さな天体 (MACHO: Massive Compact Heavy Object)
(2) 弱い相互作用をする素粒子 (WIMP: weakly interacting massive particle)

(1) の可能性は現在ではほぼ否定された。(2) の素粒子としてはいくつかの候補があり，探索が続けられているが未だ発見されていない。

F.6.3　宇宙の加速膨張とダークエネルギー

パールマター (S. Perlmutter) らは，遠い宇宙の超新星爆発を観測して，宇宙の膨張が加速しているという結論を得た。その他の結果を総合すると，宇宙に存在する物質の割合は表 F.8 のように結論される。

ダークエネルギー (dark energy) とは何であろうか。真空に満ちて斥力を与えるものであり，その正体はわかっていない。その性質は，アインシュタインが導入して「一生の不

[39] 重力が強いと時空間が歪み。遠方からの光が曲がって，レンズのようなはたらきをする効果。

表 F.8: 宇宙に存在するものの割合

物質	割合
通常の物質	$\sim 4\%$
ダークマター	$\sim 22\%$
ダークエネルギー	$\sim 74\%$

覚」と後悔したという宇宙項の性質と矛盾しない。結局アインシュタインは正しかったのか。今後の研究が待たれる。

もっと「現代物理学」について勉強したい人のために

世の中にはたくさんの教科書等が出版されている。もっと本格的に入門的なことを勉強したい人は，図書館や書店などで実際に本を手にとってみて，自分に合っていると思う本を選ぶとよい。ここでは，比較的最近出版された教科書で，参考となると思われる日本語の著書を掲げる。

1. 現代物理学
   (1) 現代物理学，江沢洋著，朝倉書店，1996 年
   きちんと書いてある。
   (2) 現代物理，生井澤寛，吉岡大二郎著，放送大学教育振興会，2008 年
2. 量子力学
   (1) 量子物理，生井澤寛，小杉正男著，放送大学教育振興会，2009 年
   (2) 量子力学，原田勲，杉山忠男著，講談社，2009 年
   (3) 量子力学，佐川弘幸，清水克多郎著，シュプリンガー・ジャパン，2011 年
3. 相対性理論
   (1) 相対性理論，杉山直著，講談社，2010 年
   簡潔によくまとまっている。
4. 原子核物理学
   (1) 原子核物理学，八木浩輔著，朝倉書店，1971 年
   古典だがよくまとまっている。
   (2) 原子核物理学，永江知文，永宮正治著，裳華房，2000 年
5. 素粒子物理学
   (1) 素粒子物理入門，渡邊靖志著，培風館，2002 年
   式をできるだけ使わずに本質に迫ろうとした著書。
   (2) 素粒子・原子核物理入門，B. ポッツ他著，柴田利明訳，シュプリンガー・ジャパン，2011 年
6. 宇宙物理学

(1) 宇宙物理学入門，伏見賢一著，大学教育出版，2008 年

7. 物性物理学

(1) 新しい物性物理，伊達宗行著，講談社，2005 年
ブルーバックスだけあって，わかりやすくおもしろくまとめてある。
(2) 物性物理学，永田一清著，裳華房，2009 年
(3) 工学基礎物性物理学，藤原毅夫著，数理工学社，2009 年
(4) 物性物理学，塚田捷著，裳華房，2007 年

問題解答例

付録A章==========

問題 A.1 $x-y$ 平面，および，z 軸に点Pから下ろした垂線の足をそれぞれH，Qとすると，$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{x_{\mathrm{P}}^2+y_{\mathrm{P}}^2}$。三角形OPHにピタゴラスの定理を適用して，$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2}=\sqrt{x_{\mathrm{P}}^2+y_{\mathrm{P}}^2+z_{\mathrm{P}}^2}$ を得る。

問題 A.2 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}=(x_{\mathrm{P}},y_{\mathrm{P}},z_{\mathrm{P}})=r_{\mathrm{P}}(\frac{x_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{P}}},\frac{y_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{P}}},\frac{z_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{P}}})=r_{\mathrm{P}}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}}$。

問題 A.3 (1) 2つの原点をO，O′とする。簡単のため x,y,z 軸の向きは同じとする。点Pはそれぞれ $(x_{\mathrm{P}},y_{\mathrm{P}},z_{\mathrm{P}})$，$(x'_{\mathrm{P}},y'_{\mathrm{P}},z'_{\mathrm{P}})$ と表され，明らかにこれらのベクトルは異なる。

(2) 原点が同じで別の直交直線座標系 x',y',z' 軸を考えると，当然，各成分は異なるが，長さ $\overline{\mathrm{OP}}$ は同じである。(厳密には2つの座標系の関係を書き，$\sqrt{x_{\mathrm{P}}^2+y_{\mathrm{P}}^2+z_{\mathrm{P}}^2}=\sqrt{x'^2_{\mathrm{P}}+y'^2_{\mathrm{P}}+z'^2_{\mathrm{P}}}$ を示さないといけない。)

問題 A.4 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}=(x_{\mathrm{P}},y_{\mathrm{P}},z_{\mathrm{P}})$，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}=(x_{\mathrm{Q}},y_{\mathrm{Q}},z_{\mathrm{Q}})$ のように成分で表して証明する。

(1) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}=((\alpha+\beta)x_{\mathrm{P}},(\alpha+\beta)y_{\mathrm{P}},(\alpha+\beta)z_{\mathrm{P}})=(\alpha x_{\mathrm{P}},\alpha y_{\mathrm{P}},\alpha z_{\mathrm{P}})+(\beta x_{\mathrm{P}},\beta y_{\mathrm{P}},\beta z_{\mathrm{P}})=\alpha\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}+\beta\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$

(2) 同様に各成分で書いて証明する。

(3) $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}=(x_{\mathrm{P}},y_{\mathrm{P}},z_{\mathrm{P}})=(x_{\mathrm{P}},0,0)+(0,y_{\mathrm{P}},0)+(0,0,z_{\mathrm{P}})=x_{\mathrm{P}}\hat{\boldsymbol{e}}_1+y_{\mathrm{P}}\hat{\boldsymbol{e}}_2+z_{\mathrm{P}}\hat{\boldsymbol{e}}_3$。

(4) 簡単のため原点だけを別にとり，x,y,z 軸の向きは同じとする。原点をO′にしたときのP，Qのベクトルを $\boldsymbol{r}'_{\mathrm{P}}$，$\boldsymbol{r}'_{\mathrm{Q}}$，原点O′から見た原点Oのベクトルを $\boldsymbol{R}$ とすると，$\boldsymbol{r}'_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}+\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{r}'_{\mathrm{Q}}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}+\boldsymbol{R}$。よって $\boldsymbol{r}'_{\mathrm{P}}-\boldsymbol{r}'_{\mathrm{Q}}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$。

問題 A.5 2つのベクトルの成す角度を θ とすると $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}=|\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}||\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}|\cos\theta$ より，前者は平行 $(\theta=0)$，後者は逆向き $(\theta=\pi)$ であることがわかる。

問題 A.6 (1) $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=(B_yC_z-B_zC_y,B_zC_x-B_xC_z,B_xC_y-B_yC_x)$ より，$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_x=A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)=(A_yC_y+A_zC_z)B_x-(A_yB_y+A_zB_z)C_x=(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)B_x-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)C_x=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})B_x-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})C_x$。他の成分も同様。したがって示せた。

(2) (1) の結果を代入して $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}+(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=0$。

(3) 平行6面体の $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ が張る平行4辺形の面積は $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|$ である。一方，$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}$ とすると，この6面体の高さは $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}$。したがって体積は与式で与えられる。

付録B章==========

問題 B.1 等式 $e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}e^{i\beta}$ にオイラーの式 (B.13) を代入すると，

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

実数部分，虚数部分それぞれが等しいことから (B.17) が導かれる。

問題 B.2 (B.17) と (B.18) とを辺々足して，$\alpha+\beta, \alpha-\beta$ を改めて α, β とおき直して与式を得る。

付録 C 章==========

問題 C.1 x での偏微分は (C.4) で与えられ，y, z の偏微分は x を y, z でおきかえればよい。

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r} = -\frac{(x,y,z)}{r^3} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{116}$$

問題 C.2 図 C.A1 のように座標をとり，位置 $(x, y, 0)$ での速度ベクトル $\boldsymbol{v}$[m/s] の rot を計算しよう。$\boldsymbol{v} = (-y\omega, x\omega, 0)$ だから[40]，これを (C.12) に代入して以下のように求まる。

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = (0, 0, 2\omega) \tag{117}$$

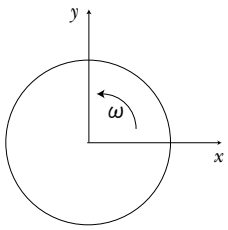

図 C.A1: rot の意味。

問題 C.3 計算すれば求まるので，解答は省く。

問題 C.4 例題 C.3 と全く同様に波動方程式が導かれる。例題 C.3 で E を G とおくだけである。

問題 C.5 $\eta(z,t) = f(z-vt)$ の波を考えよう。波の上のある点 z_0 に注目しよう。時刻 t_0 の変位を $\eta_0 = f(z_0 - vt_0)$ とする。時刻 $t_0 + \Delta t$ には，η_0 の変位が $z_0 + \Delta z$ に移動したとすると $\eta_0 = f(z_0 - vt_0 + (\Delta z - v\Delta t))$。変位は同じだから $\Delta z - v\Delta t = 0$。すなわち，$\Delta z = v\Delta t$ となって，速度 v で $+z$ 方向に進む波であることがわかる。同様に，第 2 項は $-z$ 方向に進む波であることがわかる。

問題 C.6 体積 V[m^3] を求める式は，

$$V = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\varphi \int_0^{\frac{(R-r)h}{R}} dz \ [\mathrm{m}^3] \tag{118}$$

となる。ここで z の積分を先に行うことにすると，半径 r[m] での高さは $\frac{(R-r)h}{R}$[m] である。z，φ の積分は直ちに行えて次式を得る。

$$V = 2\pi \int_0^R \frac{r(R-r)h}{R} dr = \frac{2\pi h}{R}\left[\frac{r^2 R}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{\pi R^2 h}{3} \ [\mathrm{m}^3] \tag{119}$$

[40] この式は，例えば次のように求まる。位置 $(x, y, 0)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は，$\boldsymbol{r} = (r\cos(\omega t + \phi_0), r\sin(\omega t + \phi_0), 0)$ と書ける。ここで $r = \sqrt{x^2+y^2} =$ 一定 である。速度ベクトルは，これを微分して，$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = (-r\omega\sin(\omega t + \phi_0), r\omega\cos(\omega t + \phi_0), 0) = (-y\omega, x\omega, 0)$ と求まる。

付録 D 章

問題 D.1 長さ $\ell = 5$ [m] の両端開放のパイプの基本振動の波長は 2ℓ[m]。音速を $v \simeq 340$ [m/s] とすると振動数は $v/(2\ell) \simeq 34$Hz。

問題 D.2 中央を固定した長さ ℓ[m] の木琴の基本振動の波長は 2ℓ[m]。振動数 $v/(2\ell)$[Hz] が表 D.1 の値になるように ℓ[m] を決めればよい。

問題 D.3 風は地上では障害物等の影響で上空より風速が小さい。このため，図 D.3 左のように風上では音が上方に回折してしまい，遠くまで音が届かない。

問題 D.4 図 D.9 のように $a > R/2$ [m] の場合は倒立像ができる。

問題 D.5 図 D.9 の光線の向きを逆にして $a < R$ [M] の位置に物体を置くと，$b > R$ [m] の位置に実像ができる。物体を隠しておけば，あたかもそこに物体があるように見える。

問題 D.6 凸レンズにおいて，両面が凸の場合は $R_2 < 0$, $R_1 > 0$ で $f > 0$，凸凹レンズの場合は $R_2 > R_1 > 0$ [m] なので $f > 0$ となる。凹レンズの場合も同様に $f < 0$ が示せる。

問題 D.7 光源からの (光軸に対して) 平行光線は焦点を通り，レンズと光軸との交点を通る光線は直進することを利用して作図する (図 D.A1)。像の倍率は△ PAO と△ QBO との相似により b/a となり，$b < 0$ のとき，虚像となる。

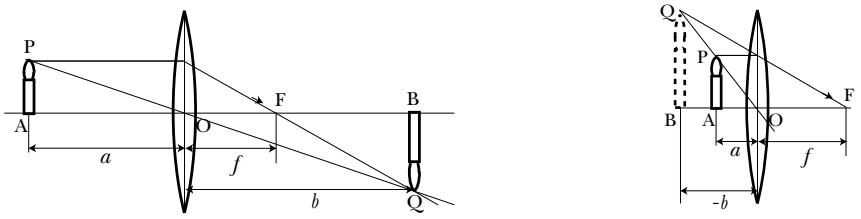

図 D.A1: 凸レンズにおけ像の作図：左は $a > f$，右は $a < f$.

問題 D.8 ガラス等のレンズの場合と屈折率が逆なので，凹レンズの働きをし，発散する。泡レンズは「負のレンズ」とでもいうべきものである。

問題 D.9 答は角膜。角膜は全体の屈折の約 2/3 を担う。空気から屈折率の大きい球面に入射するので，屈折率が一番大きい。水晶体は屈折の残りの 1/3 を担い，水晶体の厚さを調節して遠近の物体の像を網膜に結ぶようにしている。水晶体が厚すぎたり，眼の奥行きが長すぎると，網膜の手前に像を結んでしまう。それが近眼である。それを凹レンズで補正する。逆に遠視は凸レンズで補正する。

老眼は水晶体の調節機能 (毛様筋の働き) が衰えて，水晶体が薄いまま固定された状態である。それで裸眼で過ごしてきた人には凸レンズが必要になる。

問題 D.10 答えの例：暗闇では見えないから (発光体しか見えないことが射出説では説明できない)。射出説では，星は見えない。射出するものも光速を超えられないので。

問題 D.11 乱視は角膜の歪みによって起こる。コンタクトレンズを装着すると，その歪みのすき間に水が入り，歪みが矯正される。水の屈折率は 1.33 であり，水と角膜の屈折率の差は空気のそれとの差よりずっと小さい。

問題 D.12 眼の屈折率と水の屈折率が近いため，水中では角膜での屈折がほとんどない。そのため裸眼では網膜に像を結ばない。水中眼鏡は空気の層により，屈折が十分起こるようにしている。

問題 D.13 雨粒 (ほぼ球形) の中で図 D.A2 のように約 42 °の角度で反射される光線が多い。その角度は波長により異なり，光の分散のため 7 色の虹ができる。主虹は雨粒の中で一回反射されたものだが，2 回反射されると約 51 °の角度となり，7 色の位置も逆転

して，赤が一番内側，紫が外側の副虹ができる。2 回反射する光線の数は少ないため薄い副虹となる。なお主虹と副虹の間は暗い。これは主虹と副虹の間に反射される光線が少ないためである。

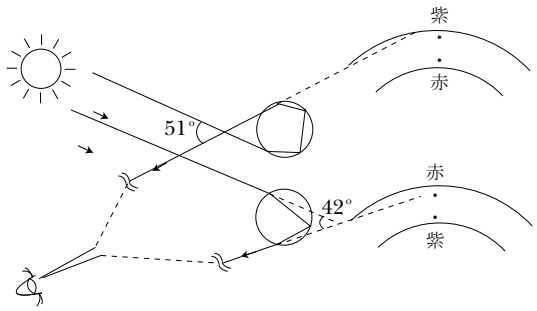

図 D.A2: 虹の成因

問題 D.14 六角柱状の氷晶は，空気の抵抗により，六角の面を下にして落下する。六角柱の上面すれすれに入射した太陽からの光線は，入射面で屈折した後上面で反射され，他の面で再び屈折して，太陽から約 90° の角度をなして観測者に届く。屈折の際の分散で 7 色に分かれ，逆さ虹となる。

問題 D.15 プリズムによるふれの角を δ，プリズムと光源との距離を ℓ とする。プリズムに上半分を通る光は光源 S_1，下半分は光源 S_2 から発せられたように見える。これは二重スリットの間隔が $2\ell\delta$ のヤングの実験に対応する。

問題 D.16 分解能は

$$\Delta\theta = \frac{0.61 \times 6 \times 10^{-7}}{1.5 \times 10^{-3}} = 2.4 \times 10^{-4}\ \mathrm{rad} \simeq 0.83\ '$$

網膜上では

$$2.4 \times 10^{-4} \times 17 \simeq 4.1 \times 10^{-3}\ \mathrm{mm} = 4.1\ \mu\mathrm{m}$$

(網膜上の光受容器 (紡状体) の平均間隔は 4.9μm で上の値にほぼ等しい。ただし，これは黄斑付近の数分角の部分のみで，その外側はもっと粗い。)

付録 E 章

問題 E.1 密度を $\rho = \frac{m}{\pi a^2 h}$ として円筒座標を用いて積分する。体積要素が $rdrd\varphi dz$ であることから

$$I = \frac{m}{\pi a^2 h}\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a rdrr^2 = \frac{ma^2}{2}\ [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \tag{120}$$

となり，円板と同じ形である。

問題 E.2 (1) 球の重心の周りの慣性モーメントは $I_G = \frac{2}{5}mR^2$. 平行軸の定理により，棒の先の周りの慣性モーメントは

$$I = I_G + m(\ell + R)^2 \simeq m\ell^2 \tag{121}$$

となる。

(2) 回転の運動方程式は

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg(R+\ell)\sin\varphi \simeq mg\ell\varphi \tag{122}$$

となる。よって，

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2\varphi,\ \omega = \sqrt{\frac{mg\ell}{I}} \simeq \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{123}$$

周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{124}$$

を得る。

(3) (2) の周期は，棒を同じ長さの糸で置き換えた周期と同じ。

問題 E.3 動き始めたときを $t = 0,\ x = 0$ とする。加速度を

$$\alpha = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} \tag{125}$$

と置いて，t 秒後の速度 v, 位置 x は

$$v = \alpha t,\ x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{126}$$

を得る。$x = L$ になる時刻は

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{\alpha}} \tag{127}$$

となる。したがって速度は

$$\sqrt{2\alpha L} = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}} \tag{128}$$

を得る。

問題 E.4 慣性モーメントが小さいほど速い。したがって，球，円柱，球殻，円筒の順である (表 9).

表 9: 中心軸のまわりの慣性モーメント (質量 m，半径 R の物体)

形状	I_G	$\frac{1}{(1+\frac{I}{mR^2})}$
円筒	mR^2	$\frac{1}{2}=0.5$
球殻	$\frac{2}{3}mR^2$	$\frac{3}{5}=0.6$
円柱	$\frac{1}{2}mmR^2$	$\frac{2}{3}\simeq 0.67$
球	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{5}{7}\simeq 0.71$

付録 F 章

問題 F.1 $\lambda=\frac{c}{\nu}$ の関係を用いて，λ が変数である式に直すだけである。$d\nu=-\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$ を用いて左辺も変換する。負符号は無視してよい。

問題 F.2 (F.6) を $\frac{a}{\lambda^5}\exp-\frac{b}{\lambda}$ と置いて λ で微分し，ゼロと置くと，$\lambda=\frac{b}{5}$，すなわち，$\lambda_{\max}T=\frac{hc}{5k_{\mathrm{B}}}$ という式が出る。これを計算すると (F.5) が求まる。

問題 F.3 (F.9) を用いて計算すれば求まる。

問題 F.4 $\lambda=\frac{c}{\nu}$ と (F.10) で $h\nu\geq W$ より求まる。

問題 F.5 $h\nu$ のエネルギーをもつ個々の光量子が電子を弾きとばすとすると，(1) ー (3) が自然に説明できる。波の場合は，波長に無関係に強度を上げれば，電子を飛び出させるに十分なエネルギーを与えるはずであり，実験事実と矛盾する。

問題 F.6 電子にはたらくクーロン引力と遠心力がつり合うと考えて，

$$\frac{mv^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ [\mathrm{N}] \tag{129}$$

が成り立つ。(129) から mv^2 を求め，(F.15) に代入すると

$$E=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\ [\mathrm{N}] \tag{130}$$

を得る。これに，(F.13) を代入して (F.15) を得る。

問題 F.7 省略 (数値を代入するだけである)。

問題 F.8 金属のフェルミレベルは，価電子帯の中央あたりに位置する。電圧をかけると，電子は容易に空いている上のレベルに励起され，自由に動くことができる (自由電子)。電子の流れが電流であり導電性をもつ。半導体や絶縁体のフェレルミレベルは，価電子帯と禁止帯との中央あたりに位置する。このため，電圧をかけても電子は上の価電子帯に移ることができず動けないため，絶縁物として振る舞う。

問題 F.9 $\beta\to 0$ に対して $\gamma\simeq 1+\frac{\beta^2}{2}$ となり，$\gamma\simeq 1$ となってガリレイ変換に一致する。

問題 F.10 (F.55) で $x\leftrightarrow x'$ 等とし，$\beta\to-\beta$ とすればよい。または，(F.55) を逆に解けばよい。

問題 F.11 逆変換 (F.63) からスタートして同様に計算すればよい。

問題 F.12 逆変換 (F.63) からスタートして同様に計算すればよい。

問題 F.13 実際にそれぞれの 4 元ベクトルをローレンツ変換し，内積をとって同じ値になることを確かめればよい。

問題 F.14 $mc\gg|\boldsymbol{p}|^2$ と $\sqrt{1+x^2}\simeq 1+\frac{x^2}{2}$; $(x\ll 1)$ より

$$K=E-mc^2=\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2c^2+m^2c^4}-mc^2\simeq mc^2(1+\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m})-mc^2=\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m} \tag{131}$$

問題 F.15 (F.63) で，4 元運動量のローレンツ変換をして，

$$\frac{E}{c} = \gamma(\frac{E'}{c} + \beta p'_x) \tag{132}$$

であるから

$$\frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda},\ \frac{E'}{c} = \frac{h}{\lambda_0},\ p'_x = -\frac{h}{\lambda_0} \tag{133}$$

を代入すると，

$$\frac{h}{\lambda} = \gamma\frac{h}{\lambda_0}(1-\beta) \tag{134}$$

を得る。整理すると (F.83) となる。

問題 F.16 平均値の定義により計算すると，

$$\frac{\int_0^\infty tN(t)dt}{\int_0^\infty N(t)dt} = \tau \tag{135}$$

を得る。それで τ は平均寿命と呼ばれる。

問題 F.17 定義により

$$N(T_{1/2}) = N_0 e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}} = \frac{N_0}{2} \tag{136}$$

$$T_{1/2} = (\ln 2)\tau \simeq 0.693\tau \tag{137}$$

となる。

問題 F.18 フェルミ粒子に対し，(F.97) で $2 = 1$ とおくと $\psi(1,1) = -\psi(1,1)$。よって $\psi(1,1)$=0，すなわちパウリの排他原理が導けた。

問題 F.19 角運動量の定義は $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ であるから，SI 単位系で $\mathrm{kg \cdot m^2/s = J \cdot s}$ となり $\hbar$ の単位と一致する。

問題 F.20 符号のある量子数をもたない粒子でなければならない。例として，光子，π^0 中間子などがある。

問題 F.21 数値を代入して，

$$0.51\ \mathrm{MeV}/c^2 = \frac{0.51 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{(3.0 \times 10^8)^2} \simeq 9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \tag{138}$$

を得る。

問題 F.22 質量を m，速さを v とすると，

$$\frac{mv^2}{2} = 1\ \mathrm{MV} \tag{139}$$

が成り立つ。よって

$$v^2 = \frac{2}{938}c^2 \simeq (0.046c)^2 \tag{140}$$

となり，光速の約 0.046 倍である。

問題 F.23 加速管の中に空気の原子等が残っていると，加速粒子が衝突・散乱して，ビーム強度が減少してしまう。そのため，できる限り真空度を高める。

問題 F.24 数値を代入するだけ。

問題 F.25 銅，銀，金の原子番号はそれぞれ 29,47,79 である。電子も同じ数だけあるから，下から詰めていって銅は，(1s に 2 個)，(2s,2p に 8 個)，(3s,3p,3d に 18 個)，(4s に 1 個) である。銀は，さらに (4s,4p,4d に 18 個) と (5s に 1 個) である。金は，(4s,4p,4d,4f に 32 個)，(5s,5p,5d に 18 個)，(6s に 1 個) である。なお，金は相対論的効果によってサイズが古典論よりも小さくなり，黄金色に輝いているとのことである。

問題 F.26 金属表面にエネルギーの壁 (仕事関数) がある。その壁を超えるエネルギーがないと電子は外に出られない。光電効果では，そのエネルギーを超える光子を吸収して電子が外に飛び出すことができる。また，熱エネルギーで飛び出す電子を熱電子という。

問題 F.27 絶対温度 $T = 300$ K として，ボルツマン定数を掛けて，$k_{\mathrm{B}}T \simeq 0.026$ eV となる。

問題 F.28 n 側に正，p 側に負の電圧を掛けると，n 側の電子は正の電極に引きつけられ，p 側のホールは負の電極に引きつけられて，中央にキャリア (電子またはホール) が存在しない領域 (空乏層) ができて電流は流れない。電圧を逆にすると，電子は正電極から負電極は流れ，ホールは逆に流れて電流が流れ続ける。すなわち整流作用を持つ。

問題 F.29 $h/(2e) \simeq 6.62 \times 10^{-34}/1.6 \times 10^{-19} \simeq 2.1 \times 10^{-15}$ Wb であるので，10^{-12} m^2 当たりの本数が約 4.8×10^3 本を超えると $B_{c2} = 10$ T を超えることになる。

問題 F.30 全体としてフェルミ粒子の数が偶数個あればよい。陽子と電子の数は同じで常に偶数個あるので，中性子数が偶数であれば原子はボース粒子として振る舞う。

問題 F.31 1 年 $= 365.25 \times 24 \times 3600 \simeq 3.16 \times 10^7$ s. $1ly \simeq 3.0 \times 10^5 \times 3.16 \times 10^7 = 9.47 \times 10^{12}$ km.

問題 F.32 1 秒角 $= \frac{\pi}{180 \times 3600} \simeq 4.05 \times 10^{-6}$ radian. $1\mathrm{pc} = \frac{1.5 \times 10^8}{4.05 \times 10^{-6}}$ km なので，$1\mathrm{pc} = \frac{3.09 \times 10^{13}}{9.47 \times 10^{12}} \simeq 3.26$ ly.

問題 F.33 (F.112) に $v = c$ を代入し，(F.113) を用いて

$$r = \frac{c}{H_0} \simeq \frac{3.0 \times 10^5}{75}\ \mathrm{Mpc} \simeq \frac{3.26 \times 3.0 \times 10^5 \times 10^6}{75}\ \mathrm{ly} \simeq 1.3 \times 10^{10}\ \mathrm{ly} \tag{141}$$

となる。つまり，約 130 億光年が宇宙の果てとなる。

問題 F.34 (F.112) で $\frac{r}{v}$ がビッグバン開始後の時間を与える。(F.111)，(F.110)，(F.113) と 1 年 $\simeq 3.16 \times 10^7$ s を用いて，

$$\frac{1}{H_0} \simeq \frac{1}{75}\ \mathrm{Mpc \cdot s/km} \simeq \frac{10^6 \times 3.26 \times (9.46 \times 10^{12})}{75 \times 3.16 \times 10^7}\ \mathrm{y} \simeq 1.3 \times 10^{10}\ \mathrm{y} \tag{142}$$

となる。つまり，約 130 億年前が宇宙の始まりとなる。