付録　ベクトル解析

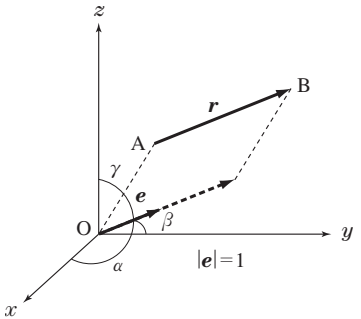
教科書「工学の基礎 電気磁気学」を読む上で，必要となるベクトル解析の要点をここに示した．本来ならば，教科書の巻末につけるべきであるが，紙数の関係上やむなく裳華房のウェブ上で公開することにした．読者の方のお役に立てば幸いである．

A.　スカラとベクトル

電圧，電流，長さ，時間，質量など物理量が位置や時間の関数として定義され，大きさだけをもつ量を**スカラ**という．スカラは ϕ や V のように斜体の細字体で書く．これに対して，電界，磁界（磁束密度），力，速度，変位などのように，物理量が位置や時間の関数として定義され，大きさと向きを併せもつ量を**ベクトル**という．ベクトルは $\boldsymbol{A}$ のように太字体で書く．ベクトルは（大きさ）×（単位ベクトル）で表すことができる．またその大きさは，絶対値の記号を用いて $|\boldsymbol{A}|$ のように表すが A のように細字体で書くこともある．

B.　単位ベクトルと方向余弦

大きさが 1 のベクトルを単位ベクトル（unit vector）という．単位ベクトルはベ



図付 1　ベクトル $\boldsymbol{r}$ の単位ベクトル

クトルの向きを表すために使われ，単位をもたない．例えば，図付 1 において点 A から点 B に向かうベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると，単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}/r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ で表され $\boldsymbol{r}$ に平行になる．

また，ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向と x 軸，y 軸，z 軸おのおのの正の方向となす角をそれぞれ α, β, γ とすると，$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ はベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向余弦（direction cosine）であり，単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ は（$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$）となる．さらに次の関係がある．

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

C.　基本ベクトルと座標系

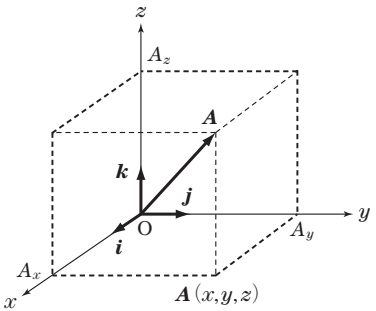
大きさが 1 の単位ベクトルの中で，直角座標系の x 軸，y 軸，z 軸の正の方向を向く単位ベクトルを基本ベクトル（fundamental vector）とよび，それぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ で表す．すなわち，

$$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{j} = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{k} = (0, 0, 1), \quad |\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$$

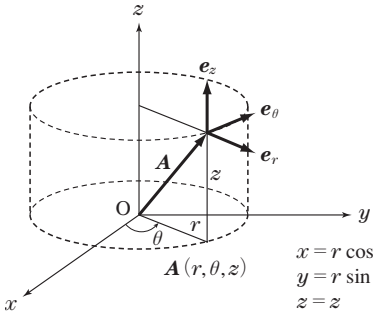
である．基本ベクトルは直角座標系では図付 2 のように $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ であるが，円筒座標系（cylindrical coordinates）では図付 3 のように，$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_z$，また球座標系（spherical coordinates）では図付 4 に示すように $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\phi$ など，直交座標系（orthogonal coordinate system）の選び方により表記が異なる．

しかし，どのような座標系を用いても，ベクトルは大きさ（magnitude）× 単位ベクトル（unit vector）で表すことができる．例えば

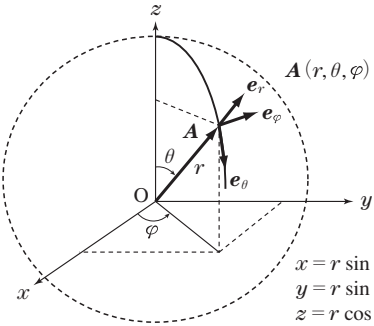
$$\text{直角座標系：}\boldsymbol{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$



図付 2　直角座標系



図付 3　円筒座標系



$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_\theta\, a\cos(\theta - \varphi)$

$x = r\sin\theta\cos\psi$
$y = r\sin\theta\sin\psi$
$z = r\cos\theta$

図付 4　球座標系

円筒座標系：$\boldsymbol{A}(r,\ \theta,\ z) = (A_r,\ A_\theta,\ A_z) = A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta + A_z\boldsymbol{e}_z$

球座標系：$\boldsymbol{A}(r,\ \theta,\ \varphi) = (A_r,\ A_\theta,\ A_\varphi) = A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$

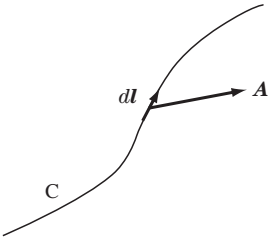
である．

位置を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ は**位置ベクトル**（position vector）ともいう．直角座標系の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,\ y,\ z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

で表される．

曲線に対しては，図付 5 に示すように曲線上の任意の 2 点を始点と終点として線要素を考え，この長さと方向に対する微小変位を**線要素ベクトル**という．通常 $d\boldsymbol{l}$



図付 5　線要素ベクトル

で表す.

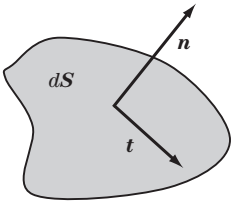
線要素ベクトルの大きさは $dl = |d\boldsymbol{l}|$ であり，直交座標系，円筒座標系，球座標系それぞれについて，次の関係が成り立つ.

$$\text{直交座標系：} dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\text{円筒座標系：} dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$\text{球座標系：} dl^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

面積に対しては図付 6 に示すように曲面上に微小曲面を考え，この面積の大きさを dS で表す．これを**面積要素**という．面積要素に垂直な単位ベクトルを**法線ベクトル**といい $\boldsymbol{n}$ で表す（n は垂直方向を意味する normal の頭文字である）．また，面積要素の接平面の単位ベクトルを**接線ベクトル**といい $\boldsymbol{t}$ で表す（t は接線方向を意味する tangential の頭文字である）．接線ベクトルは，解析の対象となるベクトルに応じて接平面上における向きが定まる.



図付 6　面積要素と単位ベクトル

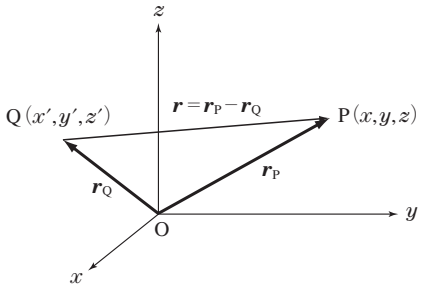
直角座標はデカルト座標（Descartes coordinates），またはカルテシアン座標（Cartesian coordinates）とも称される．直角座標を考案したデカルト（René Descartes，フランスの哲学者，数学者，1596－1650）は，著書への署名には Renatus Cartesius というラテン名を使った．学術語としてラテン語が使われていた当時としては普通のことであったが，デカルトの哲学理論がカルテシアンとよばれ，デカルトが創設した方程式を表す曲線を描く一般的方法にカルテシアン座標が関係するのはこのためである.

D. ベクトルの和，差

2つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ に対する和（sum）または差（difference）を $\boldsymbol{C}$ とすると，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}$ が成り立つ．直角座標系に対する各成分は，

$$\boldsymbol{C} = (C_x, C_y, C_z) = (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z)$$

である．例えば図付7において，2つのベクトル $\boldsymbol{r}_\mathrm{P}$，$\boldsymbol{r}_\mathrm{Q}$ の差 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_\mathrm{Q}$ は点Qから点Pに向かうベクトルとなる．



図付7　ベクトルの差

E. ベクトルの積

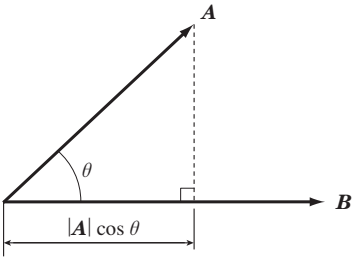
E.1　内積（スカラ積）

図付8に示すように，2つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ がなす角を θ とするとき，**内積**（dot product）は次のように定義される．

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

内積は**スカラ積**（scalar product）ともいう．また以下に示すように，同じ種類の単位ベクトルの内積は1，異なる種類の単位ベクトルの内積は0である．

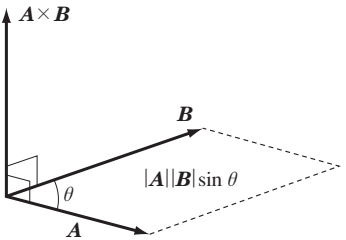
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 \\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0 \end{aligned}\right\}$$



図付8　内積

E.2　外積（ベクトル積）

図付 9 に示すように 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ がなす角を θ とするとき，大きさが $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ であり，ベクトル $\boldsymbol{A}$ からベクトル $\boldsymbol{B}$ の方向に回転させたとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ が作る平面に垂直なベクトルの向きが，右ねじが進むときの向きとなるような計算を**外積**（cross product）という．外積は**ベクトル積**ともいう．



図付 9　外積

直角座標系では次のように表される．

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

単位ベクトル同士の外積は次のようになる．

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

E.3　ベクトルについての 3 重積

3 つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ に対するスカラ 3 重積（scalar triple product）には，次の 3 種類がある．

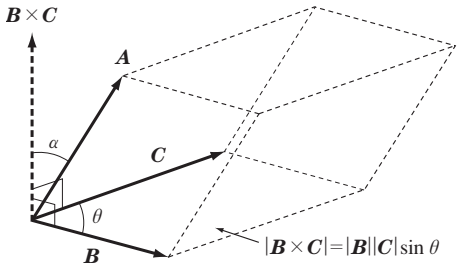
（1）　$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

$(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ は内積でありスカラである．したがって，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ はベクトル $\boldsymbol{A}$ の単なるスカラ倍となる．

（2）　**スカラ 3 重積**

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$
$$=-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})=-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$$

$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ において $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ がベクトルであり，これとベクトル $\boldsymbol{A}$ との内積をとるのでスカラとなる．これを**スカラ 3 重積**という．これは図付 10 におい



図付 10　スカラ 3 重積
$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

て，底面積が $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{C}|\sin\theta$，高さが $|\boldsymbol{A}|\cos\alpha$ の平行六面体（parallelepiped）の体積に等しい．スカラ 3 重積の計算において，その値は積の順序にはよらないが，内積をとるので正または負の符号をもつ．

スカラ 3 重積は，次のように行列で書くこともできる．

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

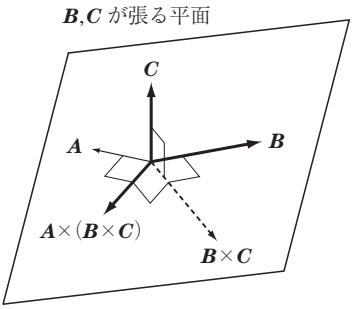
$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ はいずれも内積であるので，$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$ に等しい．

（3）　ベクトル 3 重積

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ において $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ がベクトルであり，さらにベクトル $\boldsymbol{A}$ との外積をとるのでベクトルとなる．これを**ベクトル 3 重積**という．図付 11 においてベクトル $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ はベクトル $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{C}$ のいずれにも垂直であるので，ベクトル $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{C}$ が張る平面に垂直になっている．

また，ベクトル $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ は，



図付 11　ベクトル 3 重積（太いベクトルが $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ が張る平面上のもの）

ベクトル $\boldsymbol{A}$ ならびにベクトル $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ にも垂直である．すなわち，ベクトル $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ はベクトル $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{C}$ が張る同一平面上にある．さらに，ベクトル $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ はベクトル $\boldsymbol{B}$ を $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})$ 倍したものから，ベクトル $\boldsymbol{C}$ を $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ 倍したものを差し引いたものに等しい．

ところで，ベクトル 3 重積は，順番を入れかえると以下のように値が変わる．

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$$

これらの 3 式を足し合わせると次の式が得られる．

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$$

これを**ヤコビの恒等式**という．

F.　ベクトルの微分

スカラ関数 ϕ で定義される場をスカラ場という．またベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ が対応するとき，これをベクトル場という．

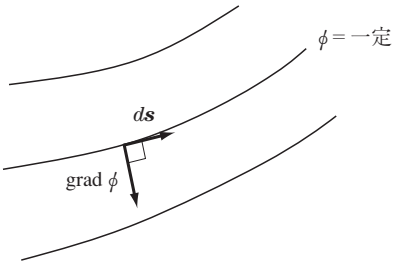
F.1　スカラ関数の勾配

直角座標系においてスカラ関数 $\phi(x,\ y,\ z)$ が与えられたとき，$x,\ y,\ z$ に関する偏導関数 $\partial\phi/\partial x,\ \partial\phi/\partial y,\ \partial\phi/\partial z$ をそれぞれ $x,\ y,\ z$ 成分とするベクトルを，$\phi(x,\ y,\ z)$ の勾配 (gradient) といい，これを次式で表す．

$$\mathrm{grad}\,\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\ \frac{\partial\phi}{\partial y},\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$\mathrm{grad}\,\phi$ は，点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ におけるスカラ関数 $\phi(x,\ y,\ z)$ の各方向の傾きに等しい．スカラ関数で表されるものには，電位や電流の他に，温度，濃度，圧力などがある．一般に，流れ (流線) は勾配の方向を向く．

スカラ関数 $\phi\,(x,\ y,\ z)$ において，$\phi=$ 一定は同一な値をとる面となる．図付 12 に示すように，この面に沿って $d\boldsymbol{s}$ だけ微小変化させた場合には次式の関係が成り立つ．



図付 12　スカラ関数と勾配

$$
\begin{aligned}
d\phi = 0 &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,dz \\
&= \left(\boldsymbol{i}\,\frac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \cdot (\boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy + \boldsymbol{k}\,dz) \\
&= \mathrm{grad}\,\phi \cdot d\boldsymbol{s}
\end{aligned}
$$

すなわち，ベクトル grad ϕ とベクトル $d\boldsymbol{s}$ は直角（垂直）になる．

円筒座標系ならびに球座標系に対しての勾配は，次のように与えられる．

$$
\text{円筒座標系：}\mathrm{grad}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z
$$

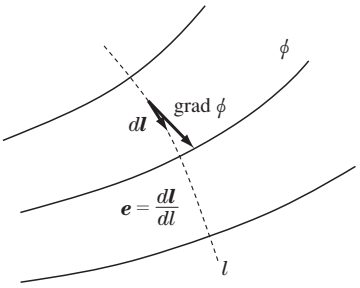
$$
\text{球座標系：}\mathrm{grad}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta}\,\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi
$$

F.2　スカラ関数の流線方向微分

図付 13 に示すように，スカラ関数の勾配に対する任意の流線 l を考えると次式が成り立つ．

$$
\frac{d\phi}{dl} = \boldsymbol{e} \cdot \mathrm{grad}\,\phi
$$

ただし，$\boldsymbol{e}$ は l 方向を指定する単位ベクトルである．この式はベクトルの線積分と対をなす．



図付 13　スカラ関数の流線方向の微分

F.3　ラプラシアン（ラプラスの演算子）

div grad ϕ は $\nabla^2\phi$ とも書き，勾配ベクトル grad ϕ の発散密度をとる演算である．演算子 $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$ は 2 階の微分作用をもつ．これを**ラプラシアン**（Laplacian）または**ラプラスの演算子**という．

直交座標系：$\text{div grad}\,\phi = \nabla^2\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

円筒座標系：$\nabla^2\phi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

球座標系：$\nabla^2\phi = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$

F.4　ベクトル関数の時間微分

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ の時間 t に関する**偏微分**（partial differential）は，それぞれの座標成分を時間で偏微分したものに等しい．直角座標系では，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}(A_x, A_y, A_z)}{\partial t} = \boldsymbol{i}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \boldsymbol{j}\frac{\partial A_y}{\partial t} + \boldsymbol{k}\frac{\partial A_z}{\partial t}$$

ベクトル関数の和，あるいは差の偏微分について以下の関係が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}) = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\pm\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

ベクトル関数のスカラ積の偏微分について，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

ベクトル関数のベクトル積の偏微分について，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

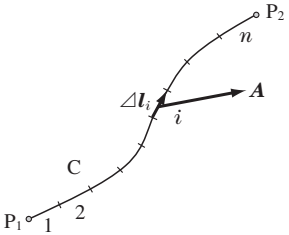
G. ベクトルの積分

G.1 ベクトルの線積分

図付 14 に示すようにベクトル場の中にある 2 点 P_1，P_2 を結ぶ曲線 C に沿って，これを n 個の微小な区間に分割する．i 番目の微小区間の変位ベクトルを $\Delta\boldsymbol{l}_i$，この微小区間内の任意の点におけるベクトルを $\boldsymbol{A}$ として，次式のベクトル和の微小極限操作を考える．

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \equiv \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{l}_i$$

これをベクトル $\boldsymbol{A}$ における曲線 C 上の**線積分**という．



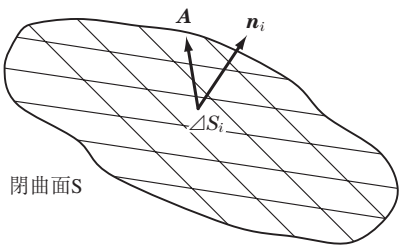
図付 14　線積分

G.2 ベクトルの閉曲面上の面積分

図付 15 に示すように，ベクトル場の中にある閉曲面 S を n 個の微小な面積に分割する．i 番目の微小面積を ΔS_i，この微小面積内の任意の点におけるベクトルを $\boldsymbol{A}$，法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_i$ として次式のベクトル和の微小極限操作を考える．

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \equiv \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_i\,\Delta S_i$$

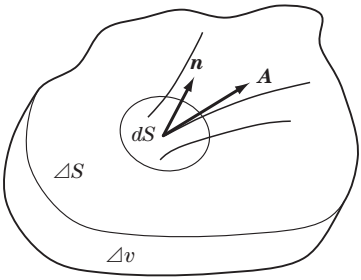
これをベクトル $\boldsymbol{A}$ における閉曲面 S 上の**面積分**という．また，dS を**面積要素**という．



図付 15　面積分

G.3　ベクトル関数の発散密度

図付 16 のように任意の空間内に微小体積 Δv を考え，この表面積が ΔS であるとする．ここで ΔS は閉曲面であり，法線方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ をもつ微小表面 dS においてベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ が定義されるとき，ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の**発散密度**（divergence）は次式で定義される．



図付 16　微小体積 Δv とその表面 ΔS における発散密度

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS}{\Delta v}$$

ここで div はダイバージェンスと読み，発散密度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ の値はスカラとなる．この値が正の場合は，その点で単位体積当り上式で与えられる量の湧き出しがあり，負の場合は吸い込みがあることを表している．発散密度は略して発散，または湧き出しというが，物理的意味は定義から明らかなように密度である．発散の用語と div の記号はクリフォード（William Kingdon Clifford, 1845－1879）による．

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の発散密度は，各成分が偏微分演算子で定義されたナブラとよばれるベクトル演算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

と，ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ との内積の形 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ をしている．演算記号 ∇ は 1846 年にハミ

ルトン（William Rowan Hamilton, 1805－1865）が導入した．

直交座標系，円筒座標系，球座標系の発散はそれぞれ次のようになる．

$$\text{直交座標系：} \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

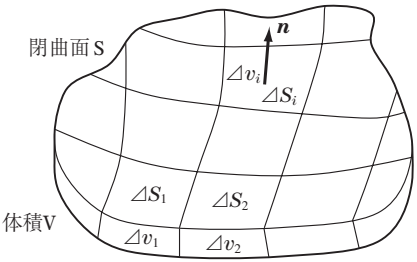
$$\text{円筒座標系：} \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{球座標系：} \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

G.4　ガウスの定理

図付 17 に示すように微小体積 Δv_i 内からある物理量の湧き出し，あるいは吸い込みがある場合，その微小体積の表面に着目して表面全体からの湧き出し量，あるいは吸い込み量を考えても両者は同じとなるはずである．これを式で表現すると次式となる．

$$\lim_{\Delta v_i \to 0} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, \Delta v_i = \oint_{\Delta S_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$



図付 17　体積 V とその閉曲面 S

体積 V については，これらすべての微小体積を加え合わせればよい．すなわち次式が成り立つ．

$$\lim_{\Delta v_i \to 0} \sum_i \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, \Delta v_i = \sum_i \oint_{\Delta S_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

ここで，左辺は積分の定義そのものである．また右辺については，隣接する 2 つの微小体積の境界面における外向きの単位法線ベクトルは，互いに反対方向を向いて

いる．このことから面積分は境界面ごとに打ち消し合い，体積 V の閉曲面 S に関する面積分のみが残る．よって，次式が成り立つ．

$$\sum_i \int_{\Delta S_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

これより，次式が得られる．

$$\int_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}\, dv = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

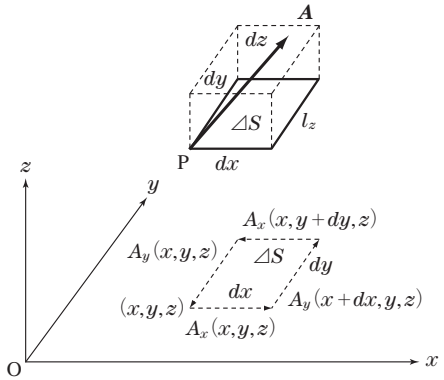
左辺の積分は，閉曲面 S 内の体積 V について積分すること（体積積分）を意味する．また右辺の積分は，閉曲面 S の表面について積分すること（面積分）を意味している．つまり，この式は体積積分と面積分の変換公式であり，これを**ガウスの定理**（Gauss theorem）という．

G.5　ベクトル関数の回転密度

流体やそれに類する物体が回転すると螺旋状の**渦**ができる．ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ において，単位面積当りにはたらく回転力（渦の強さ）は線積分を用いて次式で定義される．

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

この式は以下のように導出される．図付 18 に示すようにベクトル場の中に微小体積を考え，その表面の単位面積当りにはたらく回転力を考える．微小体積の回転軸は，点 P におけるベクトル場の回転の方向を表し，右ねじの進む方向を正とする．また，微小体積の回転速度は，点 P におけるベクトル場の回転の大きさで表される．点 P におけるベクトルを $\boldsymbol{A}(A_x,\ A_y,\ A_z)$ とすると，z 軸を中心として回転させようとする力は以下の式に示すように，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x 成分と y 成分の線積分によって決まり，z 方向の成分は寄与しない．すなわち，積分経路を l_z とすれば線積分は次のようになる．



図付 18　z 軸方向の回転力と線積分

$$\begin{aligned}\oint_{l_z} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} &= \oint_{l_z} A_x(x,\,y,\,z)\,dx + A_y(x+dx,\,y,\,z)\,dy \\ &\qquad + A_x(x,\,y+dy,\,z)\,(-dx) + A_y(x,\,y,\,z)\,(-dy) \\ &= \oint_{l_z} [A_x(x,\,y,\,z) - A_x(x,\,y+dy,\,z)]\,dx \\ &\qquad + [A_y(x+dx,\,y,\,z) - A_y(x,\,y,\,z)]\,dy \\ &= \iint \left\{\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y}\,dy\right)dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\,dx\right)dy\right\} \\ &= \iint \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dx\,dy\end{aligned}$$

この式を**グリーンの定理**という.

同様にして，x 軸ならびに y 軸を中心軸とした回転力は，それぞれの積分経路を l_x，l_y とすればグリーンの定理より次のようになる.

$$\oint_{l_x} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dy\,dz$$

$$\oint_{l_y} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)dz\,dx$$

ここで，ΔS は極限操作により $dS = dx\,dy = dy\,dz = dz\,dx$ となるので，ベクトル関数の回転の定義により次式が得られる.

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

これをベクトル関数の回転（rotation）という．正確には回転密度とよぶべきである．$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ は $\nabla \times \boldsymbol{A}$ とも書くが，これは，ナブラベクトル $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ とベクトル $\boldsymbol{A}$ との外積が回転に等しいからである．これをマクスウェルはベクトル $\boldsymbol{A}$ のカール，後に回転とよんだ．ヘヴィサイドは $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}$ と表した．

円筒座標系ならびに球座標系では次のようになる．

円筒座標系：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_z$$

球座標系：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi$$

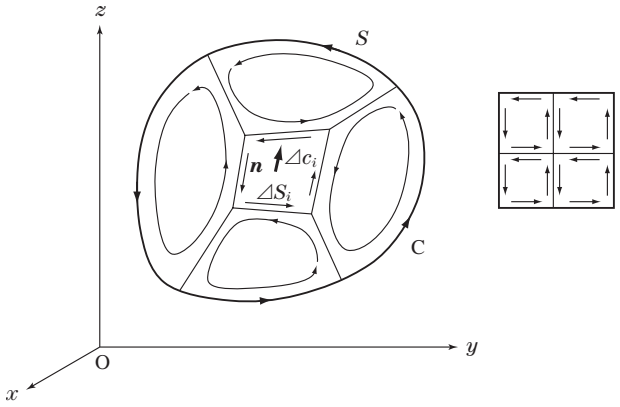
G.6　ストークスの定理

面積分と線積分の変換公式

$$\oint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

を**ストークスの定理**（Stokes theorem）という．直交座標系では，次のようにも書ける．

$$\oint_S \left\{\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right\}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \oint_C (A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz)$$



図付 19　閉曲面 S とその周 C

これは以下のようにして導くことができる．回転は単位面積当りの回転力の強さ（渦の大きさ）を表すので，回転の面積分の値は回転力の強さ（渦の大きさ）に等しい．つまり，図付 19 に示すように曲面 S を微小曲面 ΔS_i に分割すると，それぞれの微小曲面についてベクトル関数の回転の定義式より次式が成り立つ．

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, \Delta S_i = \oint_{\Delta c_i} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$$

これをすべての微小曲面について加え合わせると，

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, \Delta S_i = \sum_i \oint_{\Delta c_i} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$$

となる．ここで，左辺は積分そのものの定義であるから

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, \Delta S_i = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, \Delta S$$

と書ける．

また，図において隣接する 2 つの微小面積の境界線における線素ベクトルは互いに逆方向を向いているので，右辺の線積分は境界線ごとに打ち消し合い，曲面 S の周囲 C に関する線積分のみが残る．すなわち，

$$\sum_i \oint_{\Delta c_i} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$$

となる．

これは，図に示す四角形におきかえて考えるとわかりやすい．分割された四角形の1つに注目し，さらにその1辺に注目する．どの四角形も左周りに積分しているとすれば，その隣の四角形は逆向きに計算を行っているので，四角形全体ではそれぞれの四角形の隣接する境界成分は互いに打ち消し合い，四角形全体の外周に沿った積分のみが残る．

H.　グリーンの定理

2つのスカラ関数 ϕ，φ に対して次式の関係が成り立つ．これを**グリーンの第1定理**（Green's first theorem）という．

$$\oint_{\mathrm{S}} \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_{\mathrm{V}} (\phi\, \nabla^2 \varphi + \nabla \phi \cdot \nabla \varphi)\, dv$$

また，次式の関係を**グリーンの第2定理**（Green's second theorem）という．

$$\oint_{\mathrm{S}} \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \int_{\mathrm{V}} (\phi\, \nabla^2 \varphi - \varphi\, \nabla^2 \phi)\, dv$$

I.　ベクトル関数の種類

静電界も静磁界も，基本方程式は発散密度と回転密度から構成される．発散密度と回転密度が与えられると，境界条件の下に解は一意的に決まる．これを**ヘルムホルツの定理**という．また空間の任意の2点間で，ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の線積分が経路によらないとき，そのベクトル場を**保存場**という．この場合，常に $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = 0$ が成り立つ．保存場でないものは**非保存場**という．任意のベクトル関数は以下の3つの結合で表される．

I.1　回転のないベクトル（保存的なベクトル場）

静電界ベクトルやクーロンの法則が該当する．

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \neq 0$$

このとき，スカラポテンシャル ϕ が存在する．また，回転がないので線積分は 0 となる．すなわち，以下のようになる．

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$$

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

I.2　発散のないベクトル

磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}$ やビオ－サバールの法則が対応する．

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}(\mu\boldsymbol{H}) = \mu\boldsymbol{J} \neq 0$$

さらに，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が存在する．

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

この場合，自動的に $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})$ が満たされる．$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\phi$ とおきかえても $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0$ であるから，同一の $\boldsymbol{B}$ を与える．すなわち，$\mathrm{grad}\,\phi$ だけの任意性がある．これを取り除くため $\boldsymbol{A}$ に課す付帯条件を**ケージ**という．静磁界に対しては $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$ とする．これを**クーロンゲージ**という．

また，流線の保存則が成り立つ．すなわち

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0$$

が成り立つ．

I.3　回転も発散もないベクトル

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$$

スカラポテンシャル ϕ が調和関数となり，$\nabla^2\phi = 0$ を満たす．ディリクレ問題，ノイマン問題，ロバン問題，ラプラス方程式が該当する．静電界ベクトル，静磁界

ベクトル，重力場，熱平衡時の熱の流れなどが該当する．

J. ベクトルに関する諸公式

（1） $\mathrm{grad}(\phi\varphi) = \phi\,\mathrm{grad}\,\varphi + \varphi\,\mathrm{grad}\,\phi$

$\nabla(\phi\varphi) = \phi\nabla\varphi + \varphi\nabla\phi$

（2） $\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\,\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}\,\phi$

$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi$

（3） $\mathrm{rot}(\phi\boldsymbol{A}) = (\mathrm{grad}\,\phi)\times\boldsymbol{A} + \phi\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$

$\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\phi\times\boldsymbol{A} + \phi\nabla\times\boldsymbol{A}$

（4） $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi) = 0$

$\nabla\times\nabla\phi = 0$

（5） $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0$

$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A} = 0$

（6） $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

（7） $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B}$

$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B}$

（8） $\mathrm{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B}$

$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B}$

（9） $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\phi) = \nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi$

（10） $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) - \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\boldsymbol{A})$

$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

K. 位置ベクトルに関する公式

2つの位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ とする．大きさ $|\boldsymbol{r}|$ を r，$\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}/r$ とすると，次の諸式が成り立つ．

$$\mathrm{grad}\,r = \nabla r = \boldsymbol{e}$$

$$\mathrm{grad}\,\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}=\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r}=\nabla\times\boldsymbol{r}=0$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}\right)=4\pi\,\delta(\boldsymbol{r})$$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\right)=\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=4\pi\,\delta(\boldsymbol{r})$$

ここで，$\delta(\boldsymbol{r})$ はディラックの**デルタ関数**（Dirac δ－function）であり，次式で表される．

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\,\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$$

δ 関数には次の性質がある．

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=0\quad(r\neq r')$$

$$\oint_{\mathrm{V}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dv=1$$

$$\oint_{\mathrm{V}}f(\boldsymbol{r})\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dv=f(\boldsymbol{r}')$$

ここで $f(\boldsymbol{r})$ は任意の関数である．