『理工系の基礎 力学』章末問題詳細解答

最終更新 2022 年 5 月 25 日

第１章　座標とベクトル

【1】 等速直線運動である．$x(t) = x_0 + v_0 t$ (1.19) において，$x_0 = 0$ m，$v_0 = 5$ m/s，$t = 3$ s とすればよい．速度は一定なので $v = 5$ m/s．位置は $x = 5\ \mathrm{m/s} \times 3\ \mathrm{s} = 15$ m.

【2】 等加速度直線運動である．$v(t) = v_0 + a_0 t$ (1.29) および $x(t) = x_0 + v_0 t + (1/2)a_0 t^2$ (1.31) において，$x_0 = 0$ m，$v_0 = 0$ m/s，$a_0 = 2\ \mathrm{m/s^2}$，$t = 3$ s とすればよい．速度は $v = 2\ \mathrm{m/s^2} \times 3\ \mathrm{s} = 6$ m/s．位置は $x = (1/2) \times 2\ \mathrm{m/s^2} \times (3\ \mathrm{s})^2 = 9$ m.

【3】 等加速度運動における速さと移動距離の関係式 $v^2(t_b) - v^2(t_a) = 2a_0[x(t_b) - x(t_a)]$ (1.34) において，$a_0 = 2\ \mathrm{m/s^2}$，$v(t_a) = 1$ m/s，$x(t_b) = 6$ m，$x(t_a) = 0$ m とおけばよい．$v^2 - 1^2 = 2 \times 2\ \mathrm{m/s^2} \times 6$ m より，$v = 5$ m/s.

【4】 図を描いて考える．また，座標成分を用いた考察でもよい．$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}$ である．

【5】 (1.18) のように，位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ の各成分を t で微分すれば，速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ の各成分が求められる．

(a) $\boldsymbol{v}(t) = \big(Abe^{bt}(\cos bt - \sin bt), Abe^{bt}(\sin bt + \cos bt), 0\big)$.

(b) $\boldsymbol{v}(t) = (\nu L \sinh \nu t, \nu L \cosh \nu t, L/t)$.

ここで，指数関数の導関数について $(d/dx)e^x = e^x$，双曲線関数の導関数について $(d/dx)\sinh x = \cosh x$，$(d/dx)\cosh x = \sinh x$，対数関数の導関数について $(d/dx)\ln x = 1/x$ を使った．また，$df(bt)/dt = b\dot{f}(bt)$ (b は定数) に注意する．

【6】 x-t グラフの各区間は直線で表されているので，各区間で質点は等速直線運動をしている．質点の速度は，区間ごとに直線の傾きから求められる．

(a) $0\ \mathrm{s} < t < 5$ s では $v = 10\ \mathrm{m}/5\ \mathrm{s} = 2$ m/s，$5\ \mathrm{s} < t < 8$ s では $v = 0$ m/s，$8\ \mathrm{s} < t < 10$ s では $v = (30\ \mathrm{m} - 10\ \mathrm{m})/(10\ \mathrm{s} - 8\ \mathrm{s}) = 20\ \mathrm{m}/2\ \mathrm{s} = 10$ m/s，$10\ \mathrm{s} < t < 20$ s では $v = (40\ \mathrm{m} - 30\ \mathrm{m})/(20\ \mathrm{s} - 10\ \mathrm{s}) = 10\ \mathrm{m}/10\ \mathrm{s} = 1$ m/s.

(b) 略解の通り．

【7】 各区間では，車は等速直線運動をしている．区間ごとに $x(t_2) - x(t_1) = v_0(t_2 - t_1)$ (1.21) を用いて距離を求める．

(a) 初めの 10 秒間で進んだ距離を x_1[m] とすると $x_1 = 15\ \mathrm{m/s} \times 10\ \mathrm{s} = 150\ \mathrm{m}$ である．

(b) 30 秒間に車が進んだ距離を x_2[m] とすると $x_2 = 150\ \mathrm{m} + 20\ \mathrm{m/s} \times 20\ \mathrm{s} = 550\ \mathrm{m}$ である．

(c) 略解の通り．

【8】 (1.18)，(1.27) を参照．

$\boldsymbol{v}(t) = d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}_0 t$，$\boldsymbol{a}(t) = d^2\boldsymbol{r}/dt^2 = d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{a}_0$．以上のことは，成分で表せば $x(t) = x_0 + v_{0x}t + (1/2)a_{0x}t^2$，$y(t) = y_0 + v_{0y}t + (1/2)a_{0y}t^2$，$z(t) = z_0 + v_{0z}t + (1/2)a_{0z}t^2$ から $dx/dt = v_{0x} + a_{0x}t$，$dy/dt = v_{0y} + a_{0y}t$，$dz/dt = v_{0z} + a_{0z}t$ および $d^2x/dt^2 = a_{0x}$，$d^2y/dt^2 = a_{0y}$，$d^2z/dt^2 = a_{0z}$ を求めることと同じである．

【9】 (1.27) を参照．$\boldsymbol{r}(t)$ の各成分を t で 2 階微分する．

(a) $\boldsymbol{a}(t) = \left(-2Ab^2e^{bt}\sin bt, 2Ab^2e^{bt}\cos bt, 0\right)$.

(b) $\boldsymbol{a}(t) = (\nu^2 L\cosh\nu t, \nu^2 L\sinh\nu t, -L/t^2)$.

【10】 v-t グラフの各区間は直線で表されているので，各区間において，質点は等加速度直線運動をしている．v-t グラフにおける直線の傾きは加速度を表している．

質点の変位は，v-t グラフ内の線で囲まれた面積に現れている (ただし正負に気をつける)．

(a) $0\ \mathrm{s} < t < 3\ \mathrm{s}$ では $a = 15\ \mathrm{m/s}/3\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{m/s^2}$，$3\ \mathrm{s} < t < 6\ \mathrm{s}$ では $a = 0\ \mathrm{m/s^2}$，$6\ \mathrm{s} < t < 14\ \mathrm{s}$ では $a = ((-5)\ \mathrm{m/s} - 15\ \mathrm{m/s})/(14\ \mathrm{s} - 6\ \mathrm{s}) = -20\ \mathrm{m/s}/8\ \mathrm{s} = -2.5\ \mathrm{m/s^2}$，$14\ \mathrm{s} < t < 18\ \mathrm{s}$ では $a = 0\ \mathrm{m/s^2}$，$18\ \mathrm{s} < t < 23\ \mathrm{s}$ では $a = (0\ \mathrm{m/s} - (-5)\ \mathrm{m/s})/(23\ \mathrm{s} - 18\ \mathrm{s}) = 5\ \mathrm{m/s}/5\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{m/s^2}$ である．

(b) ここでは，台形の面積から求めてみよう．$(3 + 12) \times 15 \div 2 = 225/2 = 112.5$ であるので，動いた距離は $1.125 \times 10^2\ \mathrm{m}$ である．

(c) 12 s から 23 s までに動いた距離は，台形の面積が $(4+11)\times 5 \div 2 = 75/2 = 37.5$ となることより，37.5 m であるが，t 軸の下の図形であるから，これは変位が -37.5 m であることを表している．(b) の結果とあわせると，$112.5\ \mathrm{m} - 37.5\ \mathrm{m} = 75\ \mathrm{m}$，$t = 0$ で質点は原点 $(x = 0)$ にいたので，23 秒後の位置は $x = 75$ m の位置である．

第２章　運動の法則と力

【1】 一定の力がはたらく間，物体は等加速度直線運動をする．その加速度の大きさは $a_0 = F/m$ で，力をかけ始めた時刻を $t = 0$ とすると t 秒後の速さは $v - a_0 t$ で与えられる．したがって，静止するまでにかかる時間は，mv/F である．

【2】(a) 川岸に止まっている観測者の座標系をSとする．川の流れの速度は一定で $\boldsymbol{V}$ であるとする．川の水面に対し静止している観測者の座標系をS′とする．川の水面に対する船の速度はS′系で観測する速度 $\boldsymbol{v}'$ である．したがって，ガリレイ変換 (2.7) により，川岸の観測者は船の速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}$ を観測する．このとき，$\boldsymbol{v}$ は船の川岸 (の観測者) に対する**相対速度**である，などという．

(b) 水面に対する船の速度ベクトルと川の流れの速度ベクトルは直交しているので，三平方の定理により，実際の船の速さは $\sqrt{(4\ \mathrm{m/s})^2 + (3\ \mathrm{m/s})^2} = 5\ \mathrm{m/s}$ と求められる．

【3】光の速度は秒速約30万kmである．図2.17から，微小角 θ のとき $\sin\theta \sim \theta$ なので，真の位置との方向のずれは $30000 \div 300000000 \sim 10^{-4}$ 程度であることがわかる ($\sim$ は，数値の桁がおおむね一致していることを表す)．よって，星から来る光を望遠鏡に入れるには，角度にして約2.3秒ほど垂直方向から公転方向に傾ければよい．

【4】 $W = mg$ (2.13) より，$1.0\ \mathrm{kg} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} = 9.8\ \mathrm{N}$．なお，これを1 kg重 (または1 kgw) とよぶ．

【5】力のつり合いを，成分ごとに調べる．

左右の糸の張力をそれぞれ S_1，S_2 とする．垂直成分の力のつり合いは $mg = S_1\cos\theta + S_2\sin\theta$，水平成分の力のつり合いは $S_1\sin\theta = S_2\cos\theta$ を意味する．これらの式から，$S_1 = mg\cos\theta$，$S_2 = mg\sin\theta$ を得る．

なお，2つの糸の方向に x 軸，y 軸をとり，おもりにはたらく力を x 成分，y 成分に分けて考えてみてもよい．

【6】(a) 糸の張力の大きさ S は左右で等しい．各斜面に沿った成分の力のつり合いから $mg\sin\theta = S$，$Mg\cos\theta = S$ がわかる．これらの式から張力 S を消去し，$mg\sin\theta = Mg\cos\theta$ であるので，$m/M = 1/\tan\theta (= \cot\theta)$．

(b) 最大静止摩擦力の大きさは，垂直抗力の大きさと静止摩擦係数の積で与えられる．各斜面に沿った成分の力のつり合いを考え，張力の大きさを消去する．

左に動きだすかどうかぎりぎりのときは

$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = Mg\cos\theta + \mu Mg\sin\theta\,,$$

右に動きだすかどうかぎりぎりのときは

$$mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta = Mg\cos\theta - \mu Mg\sin\theta$$

がそれぞれの場合に成り立つ．２つの場合で，摩擦力の向きが異なることに注意する．したがって，

$$\frac{1-\mu\tan\theta}{\tan\theta+\mu} \leq \frac{m}{M} \leq \frac{1+\mu\tan\theta}{\tan\theta-\mu}$$

であることがわかる．

【7】 力のつり合いの条件と，静止摩擦力の最大値から，上限が求められる．

物体が高さ h の位置に静止しているとする．力のつり合いは図**??**のようになる．物体に鉛直下方にはたらく重力の大きさを W とすると，床からの垂直抗力の大きさ N は $N = [(R-h)/R]W$，静止摩擦力の大きさ f は $f = [\sqrt{R^2-(R-h)^2}/R]W$ である．$f \leq \mu N$ であるから $\sqrt{R^2-(R-h)^2} \leq \mu(R-h)$ より $h \leq \left(1-1/\sqrt{1+\mu^2}\right)R$ である．

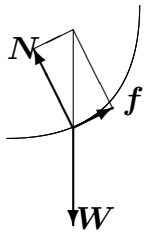

図 1　**【7】**における力のつり合い

【8】 2 つの物体それぞれについて，運動方程式を立てる．

(a) 加速度の大きさを a とする．質量 M の物体の運動方程式は $Ma = F - f$，質量 m の物体の運動方程式は $ma = f$ である．この２つの式より $f = [m/(M+m)]F$ である．質量 m の物体にはたらく垂直抗力を N とすると，$f \leq \mu N$ および $N = mg$ より $F \leq \mu(M+m)g$ である．よって，F の上限値は $\mu(M+m)g$ である．

(b) 質量 m の物体の運動方程式は $ma' = \mu' mg$ であるので $a' = \mu' g$ である．

【9】 運動方程式を成分に分けて，調べる．

物体にはたらく力は重力と斜面からの垂直抗力，そして動摩擦力である．重力を斜面下方向きの力と斜面に垂直な方向の力に分解する．この斜面に垂直な方向の分力は垂直抗力とつり合っているはずであるので，垂直抗力の大きさは $Mg\cos\theta$ である．よって，摩擦の法則により動摩擦力の大きさは $\mu' Mg\cos\theta$ である．物体の運動方程式は，斜面に沿って下方に x 軸をとると，物体の加速度の大きさを a とすれば $Ma =$

$Mg\sin\theta - \mu' Mg\cos\theta$ となる．これより，加速度の大きさは $a = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$ と求められる．特に，$\tan\theta = \mu'$ のときは等速度運動になる．

【10】 2 つの物体それぞれについて運動方程式を立てる．糸の張力の大きさ S は共通であることを用いて，解を求める．

(a) 質量 m の物体の運動方程式は，$ma = S - \mu' mg$，質量 M の物体の運動方程式は，$Ma = Mg - S$ である．S を消去すると，$a = [(M - \mu' m)/(M + m)]g$ を得る．

(b) 力のつり合いから，静止摩擦力の大きさを f とすると，$f = S = Mg$ が成り立つ．最大静止摩擦力は μmg で，$f \leq \mu mg$ となることより，$M \leq \mu m$ であることがわかる．

第３章　簡単な運動

【1】 ボールを質点と見なす．(3.3)，(3.4) で，$x_0 = 26$ m，$v_0 = 0$ m/s，$t = 2$ s とすればよい．

速度の向きは鉛直下向き，大きさ (速さ) は $9.8\ \mathrm{m/s^2} \times 2\ \mathrm{s} = 19.6\ \mathrm{m/s}$．落下距離は $(1/2) \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times (2\ \mathrm{s})^2 = 19.6$ m であるので，地上から 6.4 m 上空の位置である．

【2】 鉛直上方に x 軸をとると，運動方程式は質点が上方に向かっている間は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - bv$$

となる．初期条件を $v(0) = v_0$ とする．微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(v + \frac{mg}{b}\right) = -\frac{b}{m}\left(v + \frac{mg}{b}\right)$$

と書き直されるので，その一般解は

$$v(t) = Ce^{-(b/m)t} - \frac{mg}{b}$$

(C は定数) となり，初期条件から

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)e^{-(b/m)t} - \frac{mg}{b}$$

のように速度が求められる．

最高点に到達する時刻を t_1 とすると，$v(t_1) = 0$ なので

$$t_1 = \frac{m}{b}\ln\left(1 + \frac{bv_0}{mg}\right)$$

となる．抵抗が小さい場合，$b \sim 0$ のとき $t_1 \sim v_0/g$ となる．

【3】 鉛直下方に x 軸をとると，運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg - b'v^2$$

となる．この微分方程式は

$$\int \left(g - \frac{b'}{m}v^2\right)^{-1} dv = \int dt + C$$

の積分において，初期条件から

$$t = \int_0^v \left(g - \frac{b'}{m}V^2\right)^{-1} dV = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{b'g}} \ln \frac{\sqrt{mg} + \sqrt{b'v}}{\sqrt{mg} - \sqrt{b'v}}$$

である．ここから変形を続けていくと，解

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{b'}} \tanh \sqrt{\frac{b'g}{m}} t$$

に到達する．$\sqrt{b'g/m}\,t \sim 0$ のときは $v \sim gt$ である．また，$\sqrt{b'g/m}\,t$ が大きいと $v \sim \sqrt{mg/b'}$ となり，これが，この場合の終端速度である．なお，$\tanh x = \sinh x/\cosh x$ である．

【4】 鉛直軸について回転対称 (軸対称) な図形であることから，ある鉛直平面内で初速 v_0 を持った質点がどのような軌跡を描くかを考える．なぜならば，水は水滴の連続と考えればよいし，質点の運動はその質量にはよらないからである．

3.2 節で述べたように，軌跡の放物線は投射角 θ_0 の場合，

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta_0}$$

である (式 (3.35))．これを変形して，

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{1}{2v_0^2}gx^2(1 + \tan^2\theta_0)$$

とすれば，軌跡を表す式は $\tan\theta_0$ の 2 次式と見ることができる．θ_0 は水平から測った投射角である．$Z = \tan\theta_0$ で表すと，

$$\frac{g}{v_0^2}x^2Z^2 - 2xZ + \frac{g}{v_0^2}x^2 + 2y = 0$$

となる．

さて，逆に Z がこの 2 次方程式の解として求められるとすると，実数解が存在する条件 (2 次方程式の判別式 ≥ 0) より，

$$x^2 - \frac{g}{v_0^2}x^2\left(\frac{g}{v_0^2}x^2 + 2y\right) \geq 0$$

を得る．ある点 (x, y) を通る放物軌道のうち，原点からの投射で到達するものは，この不等式で限られているということである．

略解の図のように，(x, y) の範囲は限られていることは明らかであろう．つまり，前式を整理した式

$$y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

を見ると，境界は放物線である (略解の図の太い線)．なお，このように，数学的にある条件が付いた曲線群の境界となる曲線を包絡線とよぶ．

【5】 $C = v_0^2/(2g)$ とおくと放物線は $y = C - [1/(4C)]x^2$ と書ける．C が LC に置き換えられたとき，$y = LC - [1/(4LC)]x^2$ となるが，これは $y/L = C - [1/(4C)]\,(x/L)^2$ と等価である．したがって，相似比 $1/L$ 倍で相似形となる．

【6】 フックの法則に従う復元力と，振動運動については，3.3 節を参照のこと．

(a) 重力とばねの復元力のつり合いから，$mg = k(l - l_0)$ が成り立つ．これを解いて $l = l_0 + mg/k$.

(b) $m(d^2x/dt^2) + kx = 0$.

(c) 振動方程式の一般解は $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$，ここで $\omega = \sqrt{k/m}$ である．

(d) 一般解 $x(t) = a\cos\omega t + b\cos\omega t$ およびその微分から得られる $v(t) = \dot{x}(t) = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$ において，初期条件を満たすには，$x(0) = a = A$，$v(0) = b\omega = 0$ であればよい．したがって，$x(t) = A\cos\omega t$ が解である．

(e) このとき $v(t) = -A\omega\sin\omega t$ であり，$-1 \leq \sin x \leq 1$ であるから，$v_{\max} = A\omega$，このとき $x = 0$ である．

【7】 (3.57) を用いる．$T = 2\pi\sqrt{(1\ \mathrm{m})/(9.8\ \mathrm{m/s^2})} = 2.0\ \mathrm{s}$.

【8】 **アルキメデスの原理** (静止流体中で物体の受ける力 (**浮力**) の大きさは，物体が排除した流体の重さに等しい) から，重力 mg と浮力がつり合うので $l = m/(\rho S)$ がわかる．浮きを手で下方に Δl だけ押し下げる．なお，Δl は微小であると仮定する．このとき，浮きが手を押し上げる力の大きさは $F = \rho S g \Delta l$ で，また，Δl だけ持ち上がるときも同じ大きさの力が下向きにはたらくので，力の向きとして，この力は復元

力であることがわかる．そのためフックの法則に従うばねと同じで，この浮きは周期 $T = 2\pi\sqrt{m/(\rho S g)} = 2\pi\sqrt{l/g}$ の単振動をする．

ちなみに，この解は，次元解析の考え方 (2.2 節) により理解することができる．時間の次元を持つ量を得るためには，重力加速度の大きさの他に長さの次元を持つ量が必要である．

例えば，同じ浮きを横に何本も束ねたものを考えたとき，浮きの上下する周期は変わることはない．なぜならば，束ねた浮き相互の間に力がはたらくとしても縦方向の振動に影響を及ぼすとは考えられないからである．したがって，長さの次元を持つ量としては浮きの縦方向の長さを使うしかないことがわかる．よって振動の周期は $\sqrt{l/g}$ に比例することがわかる．

【9】 中心から x の距離 ($x < R_\oplus$ (地球半径)) における質量 m の質点にはたらく万有引力の大きさは，

$$|F(x)| = G\left(\frac{4\pi}{3}|x|^3\rho\right)\frac{m}{|x|^2} = \frac{4\pi}{3}Gm\rho|x|$$

で，向きは地球中心方向である．$x = R_\oplus$ (地球半径) のとき，$|F| = mg$ となる．なぜなら地上の重力は，地球の全質量が地球の中心位置に集まったと仮定したとき，質点にはたらく力と見なすことができるからである．以下では，m は地球の質量よりはるかに小さいとし，地球は動かないものとして考える．

北極点と南極点をつなぐ細いトンネル内を滑らかに動く，質量 m の物体を考えよう．中心から $|x|$ の距離にあるとき，物体は $F = -mgx/R_\oplus$ の力を受ける．ただし，図 3.18 のように x 軸をとった．

この力は，フックの法則のように復元力が地球の中心からの距離に比例した大きさを持つことがわかる．したがって，運動方程式から物体は単振動することがわかる．その周期は $T = 2\pi\sqrt{mR_\oplus/(mg)} = 2\pi\sqrt{R_\oplus/g}$ である．なお，地球半径を $R_\oplus = 6.37 \times 10^6$ m，重力加速度の大きさを $g = 9.80$ m/s^2 としたとき，周期は 84.4 分である．

【10】 新たなトンネル内での物体の座標を x' とする．新たなトンネル内で x' にある物体にはたらく，トンネルに沿う力の大きさは $mg(x'/R_\oplus)$ である．なぜなら，物体にはたらく力の大きさは地球の中心からの距離に比例するので，トンネル方向の力の成分は物体の位置 x' に比例するからである．したがって，その振動周期は中心を通るトンネルの場合と同じである．ちなみに，地表すれすれを等速円運動する人工衛星の周期もこれと同じである (5.5 節)．

第４章　仕事とエネルギー

【1】 (4.1) を使う．

仕事は $w = 10\ \mathrm{N} \times 2\ \mathrm{m} = 20\ \mathrm{J}$ となる．

【2】 (4.13) を基に考える．

仕事率は $P = 1000\ \mathrm{kg} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times 10\ \mathrm{m/s} = 98000\ \mathrm{W} = 98\ \mathrm{kW}$ となる．

【3】 重力による位置エネルギーは，(4.17) で与えられる．

位置エネルギーは $3\ \mathrm{kg} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times 2.5\ \mathrm{m} = 73.5\ \mathrm{J}$ である．

【4】 動摩擦力は物体の運動と逆向きにほぼ一定の大きさではたらく．物体の運動の道筋によって，動摩擦力の及ぼす仕事 (道のりに比例する) はいろいろな値をとるので，動摩擦力は非保存力である．

【5】 フックの法則に従う復元力にともなう位置エネルギーは (4.18) で与えられる．

ばねに蓄えられる位置エネルギーは $(1/2) \times 100\ \mathrm{N/m} \times (0.1\ \mathrm{m})^2 = 0.5\ \mathrm{J}$ である．

【6】 質量 m の質点が速さ v で運動しているときの運動エネルギーは $(1/2)mv^2$ (4.25) である (4.3 節)．したがって，このときの運動エネルギーは $(1/2)\times 3\ \mathrm{kg}\times(7\ \mathrm{m/s})^2 = 73.5\ \mathrm{J}$ である．

【7】 動摩擦力の大きさは (2.25) のように，垂直抗力の大きさに比例する．運動方程式の形は，落体の場合と同じであることに注意する．

(a) $m(d^2x/dt^2) = -\mu' mg$.

(b) $v(t) = v_0 - \mu' gt$，$x(t) = x_0 + v_0 t - (1/2)\mu' gt^2$.

(c) 静止する時刻は $t_\mathrm{s} = v_0/(\mu' g)$，$s = v_0^2/(2\mu' g)$.

(d) $w = \int_0^{t_s}(-\mu' mg)(v_0 - \mu' gt)dt = -\mu' mgs = -(1/2)mv_0^2$.

【8】 $v_x = v_{x0}$，$v_y = v_{y0} - gt$，$y = v_{y0}t - (1/2)gt^2$ である．$(1/2)m(v_x^2 + v_y^2) = (1/2)m[v_{x0}^2 + (v_{y0} - gt)^2] = (1/2)m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 - 2gv_{y0}t + g^2t^2) = (1/2)m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2) - mgv_{y0}t + (1/2)mg^2t^2 = (1/2)m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2) - mgy$ となるので，$(1/2)m(v_x^2 + v_y^2) + mgy = (1/2)m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2)$ を得る．よって任意の時刻における，放物体の力学的エネルギー保存則が示せた．ここで，mgy は基準を $y = 0$ としたときの位置エネルギーである．

【9】 保存力はポテンシャル U を使って，(4.44) のように

$$\boldsymbol{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

と表されるので，

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{F} &= \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}, -\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right) \\ &= (0, 0, 0) = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

である (偏微分の順序は交換できることを使った)．ちなみに $\nabla \times \boldsymbol{F}$ はベクトル $\boldsymbol{F}$ の**回転**，または $\boldsymbol{F}$ のローテーション (ローテーション $\boldsymbol{F}$) とよばれる．

【10】力学的エネルギー保存則 $E = (1/2)mv^2 + U(x)$ から $v = dx/dt = \pm\sqrt{2[E - U(x)]/m}$ が得られる．ここで，問題文のポテンシャルを代入し，$y = \exp x\,(= e^x)$ とおくことにより，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2[E - U_0 y^{-2} + 2U_0 y^{-1}]}{m}}$$

が得られ，さらに整理して

$$\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2[Ey^2 - U_0 + 2U_0 y]}{m}}$$

が得られる．本文 4.4 節および例題 4.12 と同様に扱えば，積分により周期 $T = 2\pi\sqrt{m/(-2E)}$ が求められる．微小振動の場合は $T \sim 2\pi\sqrt{m/(2U_0)}$ である．

第５章　中心力と角運動量保存則

【1】角速度は単位時間当たりの回転角 (ラジアン) で与えられる．したがって，

$\omega_\oplus = 2\pi \div (24 \times 3600\ \mathrm{s}) = 7.3 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$.

【2】 ケプラーの第 3 法則は，次元解析から再現できる．$GM_\odot/a_0^2$ は加速度と同じ次元を持つ．これと同じ次元を持つ量は a_0/T^2 である．したがって a_0^3/T^2 はどの惑星でも一定である．この関係式から，木星軌道の平均半径 a_0 は $(12)^{2/3} = 5.2$ 天文単位となる．

【3】 人工天体の近地点距離が地球軌道の平均半径，遠地点距離が火星の平均半径とする．この軌道の平均半径は 1.26 天文単位である．周期を T 年とすると，ケプラーの第 3 法則により $(1.26)^3/T^2 = 1$ なので，周期は約 1.4 年，ゆえに往復に約 1.4 年かかる．

【4】 角運動量保存則または面積速度一定の法則によって，$a_1 v_1 = a_2 v_2$，すなわち $v_1/v_2 = 60$ である．

【5】 力学的エネルギー保存則から，円軌道部分の最高点での速さを v とすると，

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgR$$

である．また，最高点での円の中心方向の運動方程式は

$$\frac{mv^2}{R} = mg + N$$

である．ここで N はレールが乗り物に与える垂直抗力であり $N \geq 0$ である．これらの式から v を消去すると，

$$mgh - \frac{5}{2}mgR = \frac{1}{2}NR \geq 0$$

なので，$h > (5/2)R$ である．ゆえに最小の高さは，$h = (5/2)R$ である (最高点で速さを持つため $2R$ より大きい).

【6】 力学的エネルギー保存則から，

$$mgl = \frac{1}{2}mv^2 + 2mg(l-d)\,,$$

また，円運動の頂点では運動の法則より

$$\frac{mv^2}{l-d} = mg + S\,,$$

ただし，S は糸の張力であり $S \geq 0$ である．これらの式より $d \geq (3/5)l$ と求められる．

【7】 (a) 運動方程式より，$S = mr\omega^2$，また，各運動量の大きさは $L = mr^2\omega =$ 一定.

(b) $L = mh$ とすると，$S = mh^2/r^3$ である．よって，

$$\int_R^{R'} \frac{mh^2}{r^3}(-dr) = \frac{mh^2}{2}\left(-\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}\right) = \frac{1}{2}mv^2\bigg|_{r=R'} - \frac{1}{2}mv^2\bigg|_{r=R}$$

であるので，糸を引く仕事は質点のエネルギーの増加に等しいことが示せた.

(c) 運動方程式は糸の張力を S' とし，糸が伸び縮みしないことを考慮すると，質量 m の質点については

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - m\frac{h^2}{r^3} = -S'\,,$$

質量 M のおもりについては

$$M\frac{d^2r}{dt^2} = S' - Mg$$

である．S' を消去すると，

$$(m+M)\frac{d^2r}{dt^2} - m\frac{h^2}{r^3} = -Mg$$

となる．$r = r_0$ で一定の場合は $mh^2/r_0^3 = Mg$ である．$r = r_0 + \Delta r$ とする．Δr の 1 次までで

$$(m+M)\frac{d^2\Delta r}{dt^2} + \frac{3Mg}{r_0}\Delta r = 0$$

を得るので，角振動数は $\omega = \sqrt{3Mg/[(m+M)r_0]}$，周期は $T = 2\pi\sqrt{(m+M)r_0/3Mg}$ となる．

【8】 (a) 1 日は $T = 86400$ s であるから，静止衛星の軌道半径 r と T の関係は (5.90) において $M_\odot$ を $M_\oplus$ に置き換えたものである．したがって，$r = (GM_\oplus T^2/(4\pi^2))^{1/3} = 4.22 \times 10^7$ m である．地表からの距離は 3.59×10^7 m である．

(b) 静止衛星の質量を m，速さを v_a とすると，その力学的エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GM_\oplus m}{r} = \frac{GM_\oplus m}{2r} - \frac{GM_\oplus m}{r} = -\frac{GM_\oplus m}{2r}$$

である．ここで運動方程式

$$\frac{mv_a^2}{r} = \frac{GM_\oplus m}{r^2}$$

を用いた．一方，地表で速さ v をもつ質量 m 物体の力学的エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus}$$

である．力学的エネルギー保存則により，

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = -\frac{GM_\oplus}{2r}$$

が成り立つのでこれを解くと，v は 10.8 km/s である．

(c) 機材は静止衛星の高さにまで上げれば十分であると考える．力学的エネルギー保存則により，

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = -\frac{GM_\oplus}{r}$$

が成り立つ．この式から 10.3 km/s と求められる．

【9】 まず，レンツ・ベクトルを t で微分すると

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\dot{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{L}}{GMm} - \frac{\boldsymbol{v}}{r} + \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\dot{r}$$

である．ここで $\dot{\boldsymbol{L}} = 0$，$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ を用いた．この右辺に $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ および運動方程式

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}$$

を代入すると

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) - \frac{\boldsymbol{v}}{r} + \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\dot{r} = -\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{v}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{v}}{r} + \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\dot{r} = [r\dot{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})]\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

である．ここで $r^2 = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$ であり，この両辺を t で微分すれば $2r\dot{r} = 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}$ であることから，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ がいえる．

5.6 節で求めた解を代入すると，

$$\varepsilon_x = \frac{h^2}{GM\ell}(\cos\phi + \varepsilon) - \cos\phi = \varepsilon\,, \quad \varepsilon_y = \frac{h^2}{GM\ell}\sin\phi - \sin\phi = 0\,, \quad \varepsilon_z = 0$$

が得られ，したがって，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は大きさが離心率に等しく，近日点の方向を向いているベクトルである．ちなみに，$r + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = \ell$ は，軌道の形の式 (5.110) を再現する．

【10】 まず，軌道について極座標を用いて表す．$x = r\cos\phi$，$y = r\sin\phi$ より，

$$\frac{r^2}{a^2}\cos^2\phi + \frac{r^2}{b^2}(1 - \cos^2\phi) = 1\,,$$

すなわち，

$$\frac{1}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos^2\phi = \frac{1}{r^2}$$

が得られる．$u = 1/r$ とすると，

$$\frac{du}{d\phi} = -\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos\phi\sin\phi\left[\frac{1}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos^2\phi\right]^{-1/2}$$

であることがわかり，以下の量を u の関数で表すことができる．

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2b^2u^2}\,.$$

一方で，ニュートン・ポテンシャルの場合に，力学的エネルギー保存則を表す方程式を書き直した軌跡を表す式 (5.95)

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+\frac{1}{2}mu^2-\frac{GM_\odot m}{h^2}u=\frac{E}{h^2}$$

は，一般の中心力ポテンシャル $U(r)$ の場合には，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{h^2}U\left(u^{-1}\right)=\frac{E}{h^2}$$

となる．

これと先ほどの式を比べると，

$$U(r)=\frac{1}{2}m\frac{h^2}{a^2b^2}r^2\,,\quad E=\frac{1}{2}mh^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

であることがわかる．ちなみに，$r^2=x^2+y^2$ であるので，この中心力ポテンシャルの下での運動は，x 成分，y 成分を独立に扱うことが簡単で，それぞれが同一角振動数の単振動であることがすぐにわかる．

第６章　非慣性系と相対的な運動

【1】 おもりの質量を m とする．慣性力 (大きさ ma)，重力 (大きさ mg)，糸の張力がつり合っているので，$(ma)/(mg)=\tan(\pi/6)$ である．したがって，$a=9.8\ \mathrm{m/s^2}\times\tan(\pi/6)=5.7\ \mathrm{m/s^2}$ である．

【2】 振り子のおもりの質量を m とすると，おもりには糸の張力および鉛直下方に重力 mg と慣性力 ma の合力がはたらく．したがって，$T=2\pi\sqrt{l/(g+a)}$ である．

【3】 この場合，重力 mg と慣性力 ma との合力の大きさは，$m\sqrt{g^2+a^2}$ である．したがって，$T=2\pi\sqrt{l/\sqrt{g^2+a^2}}$ である．

【4】 (6.15) を用いる．$\tilde{F}=50\ \mathrm{kg}\times10\ \mathrm{m}\times(2\pi/20\ \mathrm{s})^2=49\ \mathrm{N}$．ちなみに，質量 50 kg の物体にはたらく重力 $W=50\ \mathrm{kg}\times9.8\ \mathrm{m/s^2}=490\ \mathrm{N}$ のおよそ 10 分の 1 である．

【5】 地球の半径を $R_\oplus=6.37\times10^6\ \mathrm{m}$，自転周期を (本当は１日より短いが近似として) $T=86400\ \mathrm{s}$ とする．赤道上の地点における遠心力による加速度の大きさは，$a=R_\oplus\omega^2=R_\oplus\left(2\pi/T\right)^2=0.0337\ \mathrm{m/s^2}$ と求められる．遠心力の大きさは，半径が一定ならば角速度の２乗に比例する．$g/a=9.8\div0.0337\sim290\sim(17)^2$ なので，角速度が約 17 倍になれば，重力と遠心力の大きさが等しくなる．

【6】 (6.24) を用いる．コリオリの力は上方にはたらく．比は，$(2 \times 7.3 \times 10^{-5} \times 700000 \div 3600) \div 9.8 = 2.9 \times 10^{-3}$ となる．

【7】ビーズが受ける静止摩擦力の大きさを f とする．ビーズが棒に対して静止しているならば，

$$m|g\cos\theta - r\omega^2\sin\theta| = f \leq \mu m(g\sin\theta + r\omega^2\cos\theta)$$

でなければならない．$\mu = \tan\theta_0$ とおくと，

$$\frac{g}{\omega^2}\cot(\theta+\theta_0) \leq r \leq \frac{g}{\omega^2}\cot(\theta-\theta_0)$$

であることがわかる．

【8】 (a) $m\left(d^2r/dt^2 - r\omega^2\right) = 0$，$(d/dt)mr^2\omega = nr$，ただし抗力を n とする．解は $r = l\cosh\omega t$ である．抗力の大きさは，$n = 2m(dr/dt)\omega$ である．ビーズの運動エネルギーの変化率は，

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\omega^2\right\}\right] = m\left(\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} + r\frac{dr}{dt}\omega^2\right) = 2mr\frac{dr}{dt}\omega^2 = rn\omega$$

である．

(b) $m(d^2r/dt^2) =$ 遠心力 $= mr\omega^2$．抗力 n はコリオリの力 (大きさ $2m(dr/dt)\omega$) とつり合う．

【9】 緯度 α の地点で物体を高さ h の塔の頂上から自由落下させる．この地点での (非慣性系) 座標軸として，南方向に x 軸，東方向に y 軸，鉛直上方に z 軸をとる．物体は $t = 0$ では $(0, 0, h)$ の位置である．運動方程式はニュートンの記法を用いると，$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\alpha$，$\ddot{y} = -2\omega(\dot{x}\sin\alpha + \dot{z}\cos\alpha)$，$\ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\cos\alpha$ となる．

３番目の式で，右辺第２項は第１項より極めて小さいと考えられるので，$\ddot{z} = -g$，すなわち $\dot{z} = -gt$ である．また，$\dot{x}$ も $\dot{z}$ より極めて小さいと考えられるので $\ddot{y} = -2\omega\dot{z}\cos\alpha = 2\omega(\cos\alpha)gt$ となる．したがって，

$$y = 2\omega\cos\alpha\left(\frac{1}{6}gt^3\right) = \frac{1}{3}\omega\cos\alpha(gt^3)$$

が得られる．地表に達する時刻を t_1 とすると，$h = (1/2)gt_1^2$ なので

$$y(t_1) = \frac{1}{3}\omega g\cos\alpha\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

となる．つまり，これだけ東へずれる．なお，地表での速さ $v_0 = gt_1$ を代入すると

$$y(t_1) = \frac{1}{3}\frac{v_0^3}{g^2}\omega\cos\alpha$$

となる．

この落下地点のずれは，コリオリの力が落下方向に対して右側＝東側にはたらくからである．慣性系から見れば，このずれは塔の頂上の速さが地上よりも速いことで理解できる．塔の頂上から落下させるときに，物体はすでに東向きの大きな速度を持っているのである．

【10】 状況は前問と同じであるので，運動方程式から $\ddot{y} = -2\omega\dot{z}\cos\alpha$，$\ddot{z} = -g$ である．$t = 0$ で初速 v_0 であるので，$\dot{z} = v_0 - gt$ である．したがって，

$$y(t) = -2\omega\cos\alpha\left(\frac{1}{2}v_0t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right)$$

が得られる．

落下の時刻 $t_2 = 2v_0/g$ を代入すると，

$$y(t_2) = -\frac{4}{3}\frac{v_0^3}{g^2}\omega\cos\alpha$$

となり，西へずれることがわかる．

第７章　質点系の運動と保存則

【1】 運動量変化は力積に等しい．向きも考慮すると，$0.1\ \mathrm{kg}\times v[\mathrm{m/s}] - 0.1\ \mathrm{kg}\times(-25\ \mathrm{m/s}) = 6.0\ \mathrm{N\cdot s}$ であるから，$v = 35\ \mathrm{m/s}$ である．

【2】 運動量保存則を用いる．運動量はベクトルであるから，その向きに気をつける．

後のボートの速さを v とすると，$50\ \mathrm{kg}\times 2\ \mathrm{m/s} = 100\ \mathrm{kg}\times v[\mathrm{m/s}]$ なので，ボートは人の飛び込んだ方向と逆向きに，$1\ \mathrm{m/s}$ で動き出す．

【3】 運動量保存則より，$2\ \mathrm{kg}\times 2\ \mathrm{m/s} + 1\ \mathrm{kg}\times 1\ \mathrm{m/s} = 2\ \mathrm{kg}\times 1.5\ \mathrm{m/s} + 1\ \mathrm{kg}\times v[\mathrm{m/s}]$，これを解いて $v = 2\ \mathrm{m/s}$．反発係数は $e = (2\ \mathrm{m/s} - 1.5\ \mathrm{m/s})/(2\ \mathrm{m/s} - 1\ \mathrm{m/s}) = 0.5$．

【4】 弾性衝突と同じとして考えればよい．木星の速度は変化しないと考えられるので，$13\ \mathrm{km/s} + 10\ \mathrm{km/s} = -13\ \mathrm{km/s} + v[\mathrm{km/s}]$ より $v = 36\ \mathrm{km/s}$．

ちなみに，ガリレイ変換により木星が静止している座標系を考えれば，そこでは壁との弾性衝突と等価である．

【5】 運動量保存則を用いる．x 方向の運動量：0.1 kg×9 m/s = (0.1 kg+0.2 kg)×V_x[m/s]，y 方向の運動量：0.2 kg×6 m/s = (0.1 kg+0.2 kg)×V_y[m/s]，であるので，$V_x = 3$ m/s，$V_y = 4$ m/s (速さ $V = 5$ m/s)．

【6】 鎖の下端からはかって l の位置の，鎖の微小な部分のみを考える．その長さを Δl とすると，その微小部分は質量 $\lambda\Delta l$ の質点と見なすことができるので，はかりの皿の寸前の位置まで自由落下したときのその速さを v としたとき，力学的エネルギー保存則から $(1/2)(\lambda\Delta l)v^2 = (\lambda\Delta l)g(h+l)$ が成り立つ．したがって，$v = \sqrt{2g(h+l)}$ である．

はかりの皿の上で微小部分が静止することから，皿に触れると皿からの力 f によって速さは v からゼロに変化する．微小時間 Δt の間に，この変化が起きるとすると，運動量変化と力積が等しいことより $(\lambda\Delta l)v = f\Delta t$，すなわち，$f = \lambda v(\Delta l/\Delta t)$ である．

ここで，$\Delta l/\Delta t = v$ なので，これを代入すると $f = \lambda v^2 = 2\lambda g(h+l)$ となる．作用反作用の法則により，はかりの皿はこの力で下方に押される．皿の上にはすでに長さ l の鎖が乗っているので，それにはたらく重力を加えた

$$F = f + (\lambda l)g = \lambda(3l + 2h)g[\mathrm{N}]$$

が，はかりの表示に現れる．普通のはかりは重量 [kg] で目盛りがついているので，はかりの目盛りは $\lambda(3l + 2h)$[kg] である．

【7】 運動量保存則より $mv = (m+M)V$，ただし V は銃弾が打ち込まれた瞬間の物体の速さである．上昇する高さは，力学的エネルギー保存則を用いることにより，

$$\frac{V^2}{2g} = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v^2}{2g}$$

となる．

【8】 衝突の瞬間の運動量保存則から $MV = MV' + mv$，また，力学的エネルギー保存則から $MV^2 = MV'^2 + mv^2$，ただし，衝突後の瞬間における左側にある質量 m の質点の速度を v とした．これらの式より，

$$v = \frac{2M}{m+M}V\,, \quad V' = V - \frac{m}{M}v = \frac{M-m}{M+m}V$$

である．連結体の重心の速度は，

$$v_{\mathrm{G}} = \frac{v}{2} = \frac{M}{m+M}V$$

である．ちなみに，連結体を１つの物体と見なしたときの有効反発係数は，

$$e = \frac{v_{\mathrm{G}} - V'}{V} = \frac{m}{m+M}$$

となる．

【9】 重心を原点にとる．質量 m_i の質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i (i = 1, 2, 3)$ とする．運動方程式は，

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = -\frac{G}{d^3} \sum_{j \neq i} m_j (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$$

である．1 番目の質点について

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= -\frac{G}{d^3}[m_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) + m_3(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3)] \\ &= -\frac{G}{d^3}[(m_1 + m_2 + m_3)\boldsymbol{r}_1 - (m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3)] \\ &= -\frac{G}{d^3} M \boldsymbol{r}_1 \end{aligned}$$

となる．ただし $M = m_1 + m_2 + m_3$，重心は原点であることを用いた．2，3 番目の質点についても同様であるから，すべての質点は同じ形の運動方程式 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i = -(GM/d^3)\boldsymbol{r}_i$ にしたがい，角速度 ω は $\omega = \sqrt{GM/d^3}$ で与えられる．

【10】 質点とばねの数を増やしていくと，それらの点は正弦関数のグラフの上に乗り，どんどん個数を増やしていくと，両端を固定した弦のような振動にどんどん近づいていく．基準振動数は，

$$\omega_a^2 = 2\left(1 - \cos\frac{\pi a}{N+1}\right)\omega_0^2$$

である．ただし，$\omega_0^2 = k/m$ とした．

第８章　剛体の力学 –回転軸の向きが一定の場合–

【1】 腕を伸ばした状態から胴体に近づけると，回転軸周りの慣性モーメントは減少する．角運動量保存則により，慣性モーメントが半分になれば角速度は倍になる．

【2】一様な球の慣性モーメントは (8.23) で与えられる．回転エネルギーは (8.17) である．

ボールの質量を M[kg] とする．並進の運動エネルギーは，$(1/2) \times M[\mathrm{kg}] \times (8\ \mathrm{m/s})^2 = 32M[\mathrm{J}]$．滑らずに転がる場合の回転のエネルギーは，$(1/2) \times (2/5) \times M[\mathrm{kg}] \times (0.2\ \mathrm{m})^2 \times (8\ \mathrm{m/s}/0.2\ \mathrm{m})^2 = 12.8M[\mathrm{J}]$．したがって，答えは $(32 + 12.8) \div 32 = 1.4$ である．

【3】 蝶番周りにおける力のモーメントのつり合い $MgL/2 = SL\sin\theta$ から，張力の大きさは $S = Mg/(2\sin\theta)$ である．力のつり合いより，蝶番から棒にはたらく力は，水平方向成分は $S\cos\theta = Mg/(2\tan\theta)$，垂直方向成分は $Mg - S\sin\theta = Mg/2$ となる．

【4】 撃力の力積を $F\Delta t$ とする．撃力を与えた瞬間に，重心は Δv の速度を持ち，重心の周りに角速度 $\Delta\omega$ を持つ．それらは $M\Delta v = F\Delta t$，$I\Delta\omega = FR\Delta t$ を満たす．重心 G の反対側，R' 離れた点の速さは $\Delta v - \Delta\omega R'$ となる．これがゼロなら，この点近傍では，この瞬間に撃力の効果をあまり感じない．したがって，$R' = \Delta v/\Delta\omega = I/(MR)$ となる．この位置を**打撃の中心**，またはスイートスポットとよぶ．ちなみに，一様な棒の端を持つなら，そこから棒の長さの 2/3 のところが打撃の中心である．なお，$R + R'$ は，重心周りの慣性モーメントが I である実体振り子の相当単振り子の長さと一致する．

【5】 質量密度を ρ とする．慣性モーメントは，平行軸の定理を用いて，

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{1}{4}a^2 + x^2\right)\pi\rho a^2 dx = \frac{1}{4}\rho\pi a^4 h + \frac{2}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3\rho\pi a^2 = \frac{1}{4}M\left(a^2 + \frac{1}{3}h^2\right)$$

と求められる．

ちなみに同様の考え方で，質量 M，半径 a の一様な球の対称軸周りの慣性モーメントは，

$$\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{4}\left(a^2 - x^2\right) + x^2\right]\pi\rho(a^2 - x^2)dx = \frac{\rho\pi}{4}\int_{-a}^{a}(a^4 + 2a^2x^2 - 3x^4)dx$$
$$= \frac{\rho\pi}{2}a^5\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) = \frac{8\pi}{15}\rho a^5 = \frac{2}{5}Ma^2$$

である．

【6】 平行軸の定理 $I = I_{\mathrm{G}} + MR^2$ および (8.33) より $T = 2\pi\sqrt{(I_{\mathrm{G}} + MR^2)/(MgR)}$. $(I_{\mathrm{G}} + MR^2)/(MgR)$ が最小となるのは $MR^2 = I_{\mathrm{G}}$ のときで，このとき $T = 2\pi\sqrt{2R/g}$ である．

【7】 軸を付け替えたときの周期は

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\mathrm{G}} + MR'^2}{MgR'}}$$

であるので，元と周期が等しいことから

$$\frac{I_{\mathrm{G}} + MR^2}{MgR} = \frac{I_{\mathrm{G}} + MR'^2}{MgR'},$$

すなわち $R'(I_{\mathrm{G}}+MR^2)=R(I_{\mathrm{G}}+MR'^2)$ である．これから $I_{\mathrm{G}}=MR'R$ という関係がわかる．つまり $R'=I_{\mathrm{G}}/(MR)$ である．このときの周期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{MR'R+MR^2}{MgR}}=2\pi\sqrt{\frac{R+R'}{g}}$$

である (これより，$R+R'$ は，相当単振り子の長さに等しいことがわかる).

【8】 加速度を a，角加速度を α とする．糸の張力を S とする．運動方程式は $Ma=Mg-S$，回転の方程式は $I\alpha=SR$，糸は滑らないので $\alpha=a/R$ であるから，以上より

$$a=\frac{M}{M+(I/R^2)}g$$

である．なお，質量分布が一様な円板では，$a=(2/3)g$ となる．ちなみに，$S=[I/(I+MR^2)]Mg$ である．

(別解) 運動エネルギー (回転を含む) は $K=(1/2)Mv^2+(1/2)I\omega^2$，ここで v はヨーヨーの速度，ω はヨーヨーの回転角速度であり，$\omega=v/R$ である．したがって，力学的エネルギー保存則より x だけ落下したとき ($t=0$ で $x=0$，$v=0$)，

$$Mgx=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(M+\frac{I}{R^2}\right)v^2\,,$$

ゆえに，$v^2=2[MR^2/(MR^2+I)]gx$ が得られる．この関係式から $a=[MR^2/(MR^2+I)]g$ がわかる．

【9】 円柱の中心軸周りの慣性モーメントを I とする．力学的エネルギー E は鉛直線から円柱中心の角度を θ とすると，

$$E=\frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{R-a}{a}\right)^2\dot{\theta}^2+Mg(R-a)(1-\cos\theta)$$

である．運動方程式は

$$\left(M+\frac{I}{a^2}\right)(R-a)^2\ddot{\theta}=-Mg(R-a)\sin\theta\,,$$

ゆえに微小振動の周期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{[M+(I/a^2)](R-a)}{Mg}}$$

となる．ここで，$I = (1/2)Ma^2$ を代入すると

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-a)}{2g}}$$

が得られる．円筒の内側を転がる円柱の振動周期は，糸の長さ $l = (3/2)(R-a)$ の単振り子の周期と同じである．

【10】 球の慣性モーメントを I とする．半球の頂上と球の中心と間の角度を θ とする．力学的エネルギーは，

$$E = \frac{1}{2}M(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I(R+r)^2\frac{\dot{\theta}^2}{r^2} + Mg(R+r)(\cos\theta - 1) = 0$$

である．$(R+r)\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$ となるときに，半球から離れる．よって，

$$\left(M + \frac{I}{r^2}\right)\cos\theta + 2M(\cos\theta - 1) = 0$$

に $I = (2/5)Mr^2$ を代入し，$\cos\theta = 10/17\ (< 2/3)$ を得る．

第９章　剛体の一般的な回転運動

【1】 $\Omega = MgR/(I\omega)$ (9.4) を使う．

回転角速度を ω とすると，

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{1\ \mathrm{s}} &= (50\times10^{-3}\ \mathrm{kg}\times 9.8\ \mathrm{m/s^2}\times 4\times10^{-2}\ \mathrm{m}) \\ &\quad \div\left(\frac{1}{2}\times 50\times10^{-3}\ \mathrm{kg}\times(3\times10^{-2}\ \mathrm{m})^2\times\omega[\mathrm{rad/s}]\right)\end{aligned}$$

より，$\omega = 139$ rad/s．１秒当りの回転数は $\omega/(2\pi) = 22.1$ 回/秒となる．

【2】 球の質量を m，半径を r，慣性モーメントを I，円運動の半径を R とする．球の重心運動を考えると，テーブルからの抗力の大きさは $f = mR\omega^2$，向きはテーブルの回転中心を向く．球の重心周りの力のモーメントの大きさは $N = rf = mRr\omega^2$ で，球の運動方向である．球の重心周りの角運動量の大きさは $L' = IR(\Omega-\omega)/r$ で，これは不変である．

題意により，角運動量の向きが，円運動と同じ角速度 ω で変化する．$d\boldsymbol{L}'/dt = \boldsymbol{N}$ より $L'\omega = N$，すなわち $I[R(\Omega-\omega)/r]\omega = mRr\omega^2$ となる．したがって，$\omega = [I/(I+mr^2)]\Omega$，$I = (2/5)mr^2$ を代入すると，$\omega = (2/7)\Omega$ である．

【3】9.2 節例題 9.4 と同様に考える．例えば，$I_{xx} = m[(l\sin\phi)^2 + (l\cos\phi)^2 + (l\sin\phi)^2 + (l\cos\phi)^2] = 2ml^2$，$I_{xy} = -m[(l\cos\phi)(l\sin\phi)+(-l\sin\phi)(l\cos\phi)+(-l\cos\phi)(-l\sin\phi)+(l\sin\phi)(-l\cos\phi)] = 0$，など．

$I_{xx} = 2ml^2$，$I_{yy} = 2ml^2$，$I_{zz} = 4ml^2$，他の要素，すなわち慣性乗積はゼロである．したがってこの場合，x，y，z それぞれの軸が慣性主軸である．また，ϕ によらないことから，$z = 0$ の平面上に任意の直交する軸を主軸とすることができる．このように，回転体でなくても主慣性モーメントが $I_X = I_Y = I_\perp \neq I_Z$ となっている剛体は無数に存在する．

【4】角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ と角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の関係は，慣性テンソル $\tilde{I}$ を用いて $\boldsymbol{L} = \tilde{I}\boldsymbol{\omega}$ と表される．座標軸は，任意に設定できるので角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の方向に z 軸をとる．このとき $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ である．したがって，$\boldsymbol{L} = (I_{xz}\omega, I_{yz}\omega, I_{zz}\omega)$ となる．角運動量の時間微分は $\dot{\boldsymbol{L}} = (I_{xz}\dot{\omega}, I_{yz}\dot{\omega}, I_{zz}\dot{\omega})$ となる．この x 成分，y 成分は一般にゼロではないが，固定された軸からの抗力が剛体に力のモーメントの x 成分，y 成分を与えることによって，軸は固定された方向を向いたままであると考えられる．なお，軸は摩擦力のような力がなければ，z 成分を持つ力のモーメントを与えることはないことに注意する．したがって，$\dot{L}_z = I_{zz}\dot{\omega}$ のみ考えればよい．ちなみに，回転の運動エネルギーも，この場合同様に考え，$K = (1/2)I_{zz}\omega^2$ とすればよいことがわかる．

【5】 もちろん，1 点では無理である．剛体中の 2 点を固定すると，その 2 点を結ぶ軸周りの回転の自由度がまだ残っている．3 点を選べば，剛体の位置，向き共に固定することができる．このとき，3 点の座標それぞれ 3 成分，全部で $3 \times 3 = 9$ つの変数があるように思えるが，剛体中の質点の互いの位置は固定されているため，3 点を頂点とした三角形の 3 辺は変化しえないので，独立変数の数は $9 - 3 = 6$ である．当然ながら，剛体の状態を重心位置・オイラー角で表す場合とその自由度は同一である．

【6】 以下のような計算で求められる．

$$
\begin{aligned}
L_z &= \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{e}_z = I_X\omega_X\boldsymbol{e}_X\cdot\boldsymbol{e}_z + I_Y\omega_Y\boldsymbol{e}_Y\cdot\boldsymbol{e}_z + I_Z\omega_Z\boldsymbol{e}_Z\cdot\boldsymbol{e}_z \\
&= I_X\omega_X\sin\theta\sin\psi + I_Y\omega_Y\sin\theta\cos\psi + I_Z\omega_Z\cos\theta \\
&= I_X(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)\sin\theta\sin\psi + I_Y(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)\sin\theta\cos\psi \\
&\quad + I_Z(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta\,.
\end{aligned}
$$

$I_X = I_Y = I_\perp$ のときは，$L_z = I_\perp\dot{\phi}\sin^2\theta + I_Z\omega_Z\cos\theta$ である．

【7】(9.61)，(9.62) を使う．

ω_Z^2 が十分大きいとき，2 つの解は $\Omega = I_Z\omega_Z/(I_\perp \cos\theta_0)$，$\Omega = MgR/(I_Z\omega_Z)$ である．これに，$I_Z = (1/2)Ma^2$，$I_\perp = (1/4)Ma^2 + MR^2$ を代入すると，

$$\Omega = \frac{2a^2\omega_Z}{(a^2+4R^2)\cos\theta_0}\,, \quad \Omega = \frac{2gR}{a^2\omega_Z}$$

となる ((9.46) を用いた).

【8】 この場合，角運動量ベクトルは

$$\boldsymbol{L} = I_\perp\Omega\sin\theta_0(\sin\psi\boldsymbol{e}_X + \cos\psi\boldsymbol{e}_Y) + I_Z\omega_Z\boldsymbol{e}_Z$$

である．これを時間微分してもよいが，基底ベクトルの微分が面倒である．

z 軸周りの一定角速度の運動であることを用いると，

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{L}} &= \Omega\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{L} \\
&= \Omega(\sin\theta_0(\sin\psi\boldsymbol{e}_X + \cos\psi\boldsymbol{e}_Y) + \cos\theta_0\boldsymbol{e}_Z) \times (I_\perp\Omega\sin\theta_0(\sin\psi\boldsymbol{e}_X + \cos\psi\boldsymbol{e}_Y) \\
&\quad + I_Z\omega_Z\boldsymbol{e}_Z) \\
&= I_\perp\Omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\psi\boldsymbol{e}_Y - I_\perp\Omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0\cos\psi\boldsymbol{e}_X - I_Z\omega_Z\Omega\sin\theta_0\sin\psi\boldsymbol{e}_Y \\
&\quad + I_Z\omega_Z\Omega\sin\theta_0\cos\psi\boldsymbol{e}_X \\
&= (I_Z\omega_Z\Omega - I_\perp\Omega^2\cos\theta_0)\sin\theta_0(\cos\psi\boldsymbol{e}_X - \sin\psi\boldsymbol{e}_Y)
\end{aligned}$$

を得る．これが

$$\boldsymbol{N} = MgR\sin\theta_0(\cos\psi\boldsymbol{e}_X - \sin\psi\boldsymbol{e}_Y)$$

と等しいので，

$$I_Z\omega_Z\Omega - I_\perp\Omega^2\cos\theta_0 = mgR$$

が求められた．この式は 9.5 節の例題 9.11 の (9.60) と同一であるので，以下は同様の計算となる．

【9】 水平面を x-y 平面，コインの中心を通りコインの面に垂直な軸を Z 軸とする．慣性主軸に沿ってオイラー角を用いると，ちょうど $\theta = \theta_0 =$ 一定，$\dot{\phi} = \Omega =$ 一定に相当する．コインが面に対して滑らないという条件から $R\dot{\phi} = -r\dot{\psi}$，すなわち $\dot{\psi} = -(R/r)\Omega =$ 一定であることがわかる．ここで，円板の重心の運動に着目すると，円板は接地点から上向きの力 mg，向心力 $m(R - r\cos\theta_0)\Omega^2$ を受けている．

したがって，円板重心周りの力のモーメントの慣性主軸座標成分は

$$\begin{aligned}
N_X &= (-mgr\cos\theta_0 + m(R - r\cos\theta_0)\Omega^2 r\sin\theta_0)\cos\psi\,, \\
N_Y &= -(-mgr\cos\theta_0 + m(R - r\cos\theta_0)\Omega^2 r\sin\theta_0)\sin\psi\,, \\
N_Z &= 0
\end{aligned}$$

である．

円板が Z 軸について対称で，かつ N_Z はゼロであるため，オイラーの運動方程式から

$$\omega_Z = 一定 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta_0 = \left(-\frac{R}{r} + \cos\theta_0\right)\Omega$$

であることがわかる．また，他の角運動量成分は$\omega_X = \Omega\sin\theta_0\sin\psi$，$\omega_Y = \Omega\sin\theta_0\cos\psi$ と書けるので，残りのオイラーの運動方程式は，

$$\left[(I_Z + mr^2)\frac{R}{r} - (I_Z - I_\perp + mr^2)\cos\theta_0\right]\Omega^2 = mgr\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}$$

となる．一様な円板の慣性モーメントは，$I_\perp = (1/4)mr^2$，$I_Z = (1/2)mr^2$ であるから，これらを代入すると円運動の角速度について

$$\Omega = \sqrt{\frac{4g\cos\theta_0}{\sin\theta_0(6R - 5r\cos\theta_0)}}$$

と求められる．

【10】 9.5 節例題 9.11 と同じ対称こまを考える．オイラーの運動方程式は，オイラー角を用いた慣性主軸座標系では

$$\begin{aligned}
&I_\perp\dot{\omega}_X - (I_\perp - I_Z)\omega_Y\omega_Z = MgR\sin\theta\cos\psi\,,\\
&I_\perp\dot{\omega}_Y - (I_Z - I_\perp)\omega_Z\omega_X = -MgR\sin\theta\sin\psi\,,\\
&I_Z\dot{\omega}_Z = 0
\end{aligned}$$

である．

第 3 式から $\omega_Z =$ 一定，第 1 式と第 2 式から

$$I_\perp(\omega_X\dot{\omega}_X + \omega_Y\dot{\omega}_Y) = MgR\sin\theta(\omega_X\cos\psi - \omega_Y\sin\psi) = MgR\dot{\theta}\sin\theta$$

がわかる．したがって，$(1/2)I_\perp(\omega_X^2 + \omega_Y^2) + MgR\cos\theta =$ 一定であることがわかる．ω_Z も一定であるので，これは回転の運動エネルギーと重力のポテンシャルエネルギーの和，すなわち全力学的エネルギーの保存と同等である．よって，全力学的エネルギーは

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}I_\perp(\omega_X^2 + \omega_Y^2) + \frac{1}{2}I_Z\omega_Z^2 + MgR\cos\theta\\
&= \frac{1}{2}I_\perp(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_Z\omega_Z^2 + MgR\cos\theta
\end{aligned}$$

である．

一方，角運動量の z 成分 $L_z = I_\perp \dot{\phi} \sin^2\theta + I_Z \omega_Z \cos\theta$ は明らかに (重力は z 成分を持つ力のモーメントを作りえないので) 保存している (先ほどのオイラーの方程式からも示すことができる)．これを使って $\dot{\phi}$ を全力学的エネルギーの式から消去すると次のようになる．

$$E = \frac{1}{2} I_\perp \dot{\theta}^2 + U(\theta)\,,$$

ここで

$$U(\theta) = \frac{1}{2} I_Z \omega_Z^2 + MgR\cos\theta + \frac{(L_z - I_Z\omega_Z\cos\theta)^2}{2I_\perp \sin^2\theta}$$

である．これは，θ についての運動エネルギーとポテンシャルの和の形をしているので，1 次元の質点の運動と同じように θ の変化を議論することができる．

θ は $E - U > 0$ となる範囲を動く．なお，$L_z - I_Z\omega_Z\cos\theta$ の符号が変化するとき $\dot{\phi}$ の符号も変わる．$\theta = \theta_0 =$ 一定が実現するのは，$\theta = \theta_0$ が U の極小を与えるときである．ここで，ポテンシャル $U(\theta)$ を θ で微分すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{dU(\theta)}{d\theta} \\
&= -MgR\sin\theta - \frac{(L_z - I_Z\omega_Z\cos\theta)^2}{I_\perp \sin^3\theta}\cos\theta + \frac{L_z - I_Z\omega_Z\cos\theta}{I_\perp\sin^2\theta}(I_Z\omega_Z\sin\theta)
\end{aligned}$$

であるから，歳差の角速度は

$$\Omega = \dot{\phi} = \frac{L_z - I_Z\omega_Z\cos\theta_0}{I_\perp \sin^2\theta_0}$$

なので

$$\left.\frac{dU(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0 \text{ は } -MgR - \Omega^2\cos\theta_0 + I_Z\omega_Z\Omega = 0$$

と等価である．

次に，$\theta = \theta_0$ 付近での θ の微小振動を考える．

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = -MgR\sin\theta - [\Omega(\theta)]^2\sin\theta\cos\theta + I_Z\omega_Z\Omega(\theta)\sin\theta\,,$$

$$\Omega(\theta) = \frac{L_z - I_Z\omega_Z\cos\theta}{I_\perp\sin^2\theta}$$

である．ここで，遅い歳差 $\Omega \sim MgR/(I_Z\omega_Z)$ のとき，$I_Z\omega_Z \gg I_\perp\Omega$ なので，$\theta = \theta_0$ 付近で

$$\frac{d^2U(\theta)}{d\theta^2} \sim I_Z\omega_Z\frac{d\Omega(\theta)}{d\theta}\sin\theta \sim I_Z\omega_Z\frac{I_Z\omega_Z\sin\theta}{I_\perp\sin^2\theta}\sin\theta = \frac{I_Z^2\omega_Z^2}{I_\perp}$$

である．したがって，微小振動の角振動数は $\omega' \sim I_Z\omega_Z/I_\perp$ である．このようなこまの軸の角度の周期的変化を**章動**とよぶ.

眠りごまの場合 $L_z = I_Z\omega_Z$ であるので，有効ポテンシャルは

$$U(\theta) = \frac{1}{2}I_Z\omega_Z^2 + MgR\cos\theta + \frac{I_Z^2\omega_Z^2}{2I_\perp}\tan^2\frac{\theta}{2}$$

となる．ここで

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\,, \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

を用いた.

$\theta = 0$，すなわち，こまの軸と鉛直軸のなす角がゼロ，の近くでは

$$U(\theta) = \frac{1}{2}I_Z\omega_Z^2 + MgR\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) + \frac{I_Z^2\omega_Z^2}{2I_\perp}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + (\theta\text{の 3 乗以上を含む項})$$

である.

したがって，$\theta = 0$ では

$$\frac{d^2U(\theta)}{d\theta^2} \sim -MgR + \frac{I_Z^2\omega_Z^2}{4I_\perp}$$

であるので，これが正であれば $\theta = \theta_0 = 0$ は安定，すなわち，微小量軸の角度を変えても θ 方向の運動は微小振動運動になる．つまり，

$$\omega_Z^2 > \frac{4I_\perp MgR}{I_Z^2}$$

であれば眠りごまは安定である.