補足事項

本書の内容を補完するために，いくつかの項目について，より詳しい説明や証明を与える. 本書を読み進む際に，ぜひ並行して以下の補足事項を読んで理解を深めてほしい．特に，A.3 と A.6 は基本的に重要である．以下の目次の丸カッコ内は，本文の関連する節を示す.

--目次----------

A.1　スカラーとベクトル　(3.1 節)

A.2　点電荷による電場と，直線電流による磁場がもつ対称性　(2.4 節)

A.3　空間の等方性・一様性と解の一意性，およびポアソン方程式と境界条件　(2.4 節，5.4 節，9.2 節)

A.4　$\nabla\times\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$ のベクトル場 $\boldsymbol{h}$ は $\boldsymbol{h}=\nabla T$ で表せる.　(4.4 節，5.3 節)

A.5　$\nabla\cdot\boldsymbol{h}=0$ のベクトル場 $\boldsymbol{h}$ は $\boldsymbol{h}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ で表せる.　(4.4 節，9.2 節)

A.6　ファラデーの電磁誘導の法則　(12.2 節)

A.7　動くループにおける磁場と電場の変換　(12.2 節)

A.8　複素指数関数　(13.1 節)

A.1　スカラーとベクトル

第３章で扱ったスカラーやベクトルの演算についての補足的説明を与える．

空間の各点に応じて値が決まる量を**スカラー**という．スカラーは，座標 xyz に対する関数 $T = T(x, y, z)$ で表すことができる．当然ながら， xyz 座標を変換して得られる任意の別の $x'y'z'$ 座標を用いて $T' = T'(x', y', z')$ と表せば，同じ点を表す (x, y, z) と (x', y', z') に対して $T = T'$ が成り立つ．あるスカラーが空間に連続的に分布するとき，それを特に**スカラー場**とよぶ．

ベクトルとは，空間の各点に応じて向きと大きさが決まる“矢印”である．ある xyz 座標で

$$\boldsymbol{A} = \big(a(x, y, z),\ b(x, y, z),\ c(x, y, z)\big)$$

で表される矢印が与えられたとする．xyz 座標を任意に回転して得られる別の $x'y'z'$ 座標で

$$\boldsymbol{A}' = \big(\ a'(x', y', z'),\ b'(x', y', z'),\ c'(x', y', z')\ \big)$$

と表した際に，同じ点を表す (x, y, z) と (x', y', z') に対して $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}'$ が同一の矢印になるのがベクトルである．なお，あるベクトル量が空間に連続的に分布するとき，それを特に**ベクトル場**とよぶ．

任意の２つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ の内積

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

を考えると，これは図形的には２つの矢印の長さと矢印同士がなす角度の $\cos\theta$ との積を表し，どんな座標軸に対しても同じ値をとるので，スカラーとなる．同様に，$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ という３つの数の組が与えられたときに，もし任意のベクトル $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ との間でつくった $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ が必ずスカラーになるなら， $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ はベクトルになる．

第３章の(3.1)で与えられる ∇T はベクトルである．なぜなら，(3.3)の $\Delta T = \nabla T \cdot \Delta \boldsymbol{r}$ において，ΔT は２点間のスカラー T の差を表すスカラーであり，$\Delta \boldsymbol{r}$ は２点間の位置を結ぶ明らかに座標系によらない矢印となるベクトルだからである．

第３章の(3.4)で与えられる $\nabla \cdot \boldsymbol{h}$ もスカラーである．なぜなら，(3.16)の $\int_{\mathrm{S}_i} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \nabla \cdot \boldsymbol{h}\, \Delta x \Delta y \Delta z$ において，$\int_{\mathrm{S}_i} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ も，立体の体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ も，座標軸の選び方によらずに定まるスカラーだからである．

最後に，(3.5)で与えられる $\nabla \times \boldsymbol{h}$ はベクトルである．なぜなら，(3.33)の $\int_{\mathrm{C}_i} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = (\nabla \times \boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{n}_i \Delta S_i$ において，$\int_{\mathrm{C}_i} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ も面積 ΔS_i もスカラーであり，$\boldsymbol{n}_i$ がベクトルだからである．

A.２　点電荷による電場と，直線電流による磁場のもつ対称性

2.4 節(a)，(b)での，点電荷による電場と，直線電流による磁場を導く際の対称性について，マクスウェル方程式の積分形にもとづいて，より詳しく説明する．マクスウェル方程式の微分形にもとづいた，より一般的な空間の等方性と一様性についての考察は補足 A.3 に与える．

(a)　点電荷の周りの電場

点電荷がつくる電場は,(2.5)が示すように電荷を中心として放射状に広がり,球面に対する接線成分をもたない．球対称性から自明に思えるが，あえて，何故かをあからさまに議論しよう．

もし，ある円周上の 1 点で電場が接線成分をもつとすると，その円周上の各点は等価なので，図 A2.1(a)に示すように，円周上のあらゆる点で電場の接線成分は大きさと向きがその点とそろう．図 A2.1(a)では時計回りの成分が描かれているが，反時計回りでもよい．このとき，どの向きから見てもこの電場が図 A2.1(a)と同じ分布をもつなら，球対称性に反しないといえる．しかし，それが不可能なことは自明だろう．

例えば，図 A2.1(a)の電場分布を図の紙面の裏側から見ると，図 A2.1(b)のように，反対回りの成分をもつことになる．これが球対称性に反するということであり，そのために，円周上のあらゆる点で接線成分はゼロでなければならない．

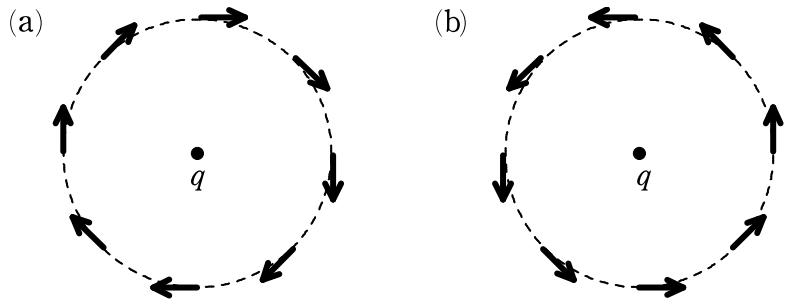
同じことはマクスウェル方程式②s を用いればもっと端的に示すことができる．つまり，図 A2.1(a)の円周を閉曲線 C として，マクスウェル方程式②s の積分形を適用すれば,

$$(\boldsymbol{E}\ \text{の接線成分})\times(\text{円周の長さ}) = 0$$

であり，このことから

$$(\boldsymbol{E}\ \text{の接線成分}) = 0$$

が導かれる．



図Ａ２.1

(b)　直線電流の周りの磁場

2.4 節(b)で，十分に長い直線状(z 方向)の導線に流れる一定電流 I のつくる磁場 $\boldsymbol{B}$ をマクスウェル方程式③と④s にもとづいて議論し, 2.4 節の図 2.17 で示したように，導線を中心とする円周に沿う磁場(2.7)

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{A2.1}$$

が生じることを示した. 磁場がこの接線成分 B_θ 以外の成分をもたないことに関して，半径方向成分がゼロ($B_r = 0$)であることは，既に 2.4 節で示した.

以下では，導線に平行な z 成分 B_z が存在しないことを導く．導線を中心とする軸対称性から，B_z は導線を中心軸とする円周上で同じ値をとり，また z 方向に平行移動しても同じ値をとる．したがって， B_z は導線からの距離 r だけの関数である.

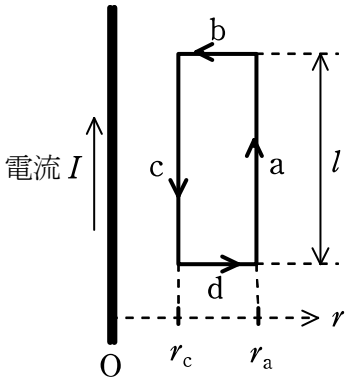


図 A2.2

図 A2.2 のように，導線を含む平面上にあって，導線に平行な長さ l の２つの線分 a と線分 c を２辺とする長方形ループに対して，④s の

$$c^2 \oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{A2.2}$$

を適用しよう．この長方形を貫く電流は存在しないこと，および磁場の半径方向成分がゼロ($B_r = 0$)であることから， $B_z(r_c)l - B_z(r_a)l = 0$ となり，結局

$$B_z(r_a) = B_z(r_c) \tag{A2.3}$$

が結論される．

このように，もしある場所に B_z が存在するなら，導線からの距離 r にも，z 方向の位置にもよらずに，全空間に一様な B_z が存在しなければならない．ここから先の議論は，直線状の電流が「 z 方向に十分に長い」という前提条件をどうとらえるかによって異なってくる．

もし「十分に長くても，無限ではない」と考えるなら，無限遠方で磁場がゼロになると考えてよいので，(A2.3)より，ただちに，いたるところで

$$B_z = 0 \tag{A2.4}$$

と結論できる．そしてこれが適切な考え方である．(ビオ - サバールの法則(9.9)は，磁場の電流方向成分がゼロであることを示している．これは，ベクトルポ

テンシャル $\boldsymbol{A}$ が，(9.6)によって $+z$ 方向を向くこと，および，磁場が $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ で表されるためである．しかしこの(9.6)は，補足事項 A.3(b)で記すように,「無限遠方で $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 」の境界条件のもとに得られる解である．したがって,「無限遠方で $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 」の仮定から $B_z=0$ を導いていることに等しい.）

一方，もし「十分に長い」を「無限に長い」と考えるなら，無限遠方で磁場がゼロになる保証はない．ただし，その場合の B_z の値はマクスウェル方程式からは決まらず，任意である．このように，マクスウェル方程式と対称性の考察だけでは，z 方向の任意の大きさの一様な磁場の存在を否定することはできない．（このことは，マクスウェル方程式③，④s の微分形を見れば明らかである.）しかし，補足事項 A.3 で説明するように,「電荷や電流の存在しない空間は等方的で一様である」という物理的要請から,「電流がゼロなら磁場もゼロ」でなければならず，z 方向の一様な磁場の存在が否定されるのである.（もし,「電流がゼロなら磁場もゼロだが, 電流を流すと, 電流方向に磁場 B_z が生じる」と仮定するなら, その現象を導くことのできないマクスウェル方程式は電磁気学の完全な理論とはいえず, 電磁気学の新たな基本法則が必要となる.）

A.3　空間の等方性・一様性と解の一意性，および ポアソン方程式と境界条件

2.3 節の最後，および**発展“空間の「等方性と一様性」，および「対称性」”**で述べたように，空間はいたるところで等方的でありかつ一様である．この基本的な要請によって，無数に存在する数学的に可能なマクスウェル方程式の解の中から，物理的に許される解が唯一に定まる．以下(a)では，マクスウェル方程式の微分形を用いてそれを一般的に示す．(b)では，特に 5.4 節と 9.2 節のポアソン方程式の解の一意性について考える．

(a)　空間の等方性・一様性とマクスウェル方程式

<u>時間変化が無い場合</u>

静電気学では，ある電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ が与えられたときの電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は，マクスウェル方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad ①$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0} \qquad ②s$$

で定まる．同様に，静磁気学では，ある電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ が与えられたときの磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は，マクスウェル方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad ③$$

$$c^2\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} \qquad ④s$$

で定まる．

①，②s(または③，④s)を満たし，かつ空間の等方性・一様性の要請を満たす解が１つ得られたとし，それを $\boldsymbol{E}_1$（または $\boldsymbol{B}_1$)としよう．$\boldsymbol{E}_1$ としては点電荷に対するクーロン電場(2.5)，$\boldsymbol{B}_1$ としては十分に長い直線電流を取り巻く円環状の磁場(2.7)はその例だが，ここでは，それが具体的にどんな解かはどうでもよい．とにかく，物理的要請を満たす解が１つ見つかったとしよう．ここ

で，仮に $\boldsymbol{E}_1$（または $\boldsymbol{B}_1$）の他に，マクスウェル方程式の別の解 $\boldsymbol{E}_2$（または $\boldsymbol{B}_2$）が求まったとしよう．$\boldsymbol{E}_1$（または $\boldsymbol{B}_1$）との差を

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1 \quad （または\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1） \tag{A3.1}$$

とおくと，$\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$(または$\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$)がともに①，②s(または③，④s)を満たすことから，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は２つの方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{A3.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0} \tag{A3.3}$$

を満たす．(A3.2)，(A3.3)は，$\rho(\boldsymbol{r}) = 0$（または $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$）に対するマクスウェル方程式①，②s(または③，④s)と同じである．つまり，$\boldsymbol{\varepsilon}$ としては，電荷(または電流)が全く存在しない空間における電場(または磁場)の解を考えればよい．当然，$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}$ は解だが，それ以外にも解はある．例えば，a，b，c を定数として，$\boldsymbol{\varepsilon} = (a, b, c)$ も(A3.2)，(A3.3)を満たす．さらに，$\boldsymbol{\varepsilon} = (2ax, -2ay, 0)$ も(A3.2)，(A3.3)を満たすことがすぐに確かめられるだろう．実際には，これらの解以外に，ゼロではない解が無数に存在することは明らかである．このことは，数学的にマクスウェル方程式を満たす $\boldsymbol{E}_2$（または $\boldsymbol{B}_2$）が無数に存在することを意味する．

ここで，空間は等方的で一様であるという物理的要請を思い出そう．この要請から，電荷や電流の存在しない無限の空間があるなら，そこでは電場はゼロ(または磁場はゼロ)となるべきである．なぜなら，電荷や電流の存在しない無限の空間において，有限の電場(または磁場)は，どんな分布であれ，空間の等方性または一様性を破るからである．したがって，この空間における有限の電場(または磁場)は，たとえマクスウェル方程式を満たすとしても，物理的観点から，存在が否定されるのである．このことから，$\boldsymbol{E}_1$（または $\boldsymbol{B}_1$）と異なる解が存在できないことが導かれる．というのは，出発点の仮定として，$\boldsymbol{E}_1$（または $\boldsymbol{B}_1$）は空間の等方性と一様性の要請を満たしている．その $\boldsymbol{E}_1$（または

$\boldsymbol{B}_1$)に，等方性と一様性を破る(ゼロ以外の) $\boldsymbol{\varepsilon}$ を加えると，その結果の $\boldsymbol{E}_2$ (または $\boldsymbol{B}_2$)は必ず等方性と一様性を破る解になってしまうからである．このように,「電荷と電流が存在しない空間は等方的かつ一様である」，という基本的要請から， $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}$ となり， $\boldsymbol{E}_1$ (または $\boldsymbol{B}_1$)以外に物理的に許容される解が存在しないことになるのである．

ちなみに，点電荷の周りの電場が球対称性をもつという要請は，（点電荷がないとすれば）空間は等方的かつ一様である，という要請と等価であることに注意しよう．

z 方向の十分に長い直線電流による磁場についての考察(2.4 節(b)と補足事項 A.2 を振り返ろう．(2.7)の解 $\boldsymbol{B}_1=(B_x,B_y,0)$ に，電流方向の一様な磁場 $(0,0,B_z)$ (ただし $B_z=$一定)を加えた解もマクスウェル方程式を満たすことを補足事項 A.2 で述べたが，ここで述べたように，空間の等方性・一様性の要請から， z 方向の磁場の存在が否定されるのである．

<u>時間変化のある一般の場合</u>

静電気・静磁気の場合と同様の議論が成り立つことを示す．ある電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ と電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ が与えられたときの電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ は, マクスウェル方程式①～④によって定まる. マクスウェル方程式を満たし, かつ空間の等方性・一様性を満たす解が１つ見つかったとし，それを $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r},t)$ とする．ここで，仮に，別の解 $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r},t)$ が存在するとし， $\boldsymbol{E}_1$ ， $\boldsymbol{B}_1$ との差を

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t),\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r},t) \tag{A3.7}$$

とおこう． $\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{B}_1$ および $\boldsymbol{E}_2$ と $\boldsymbol{B}_2$ がそれぞれマクスウェル方程式①～④を満たすことから， $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{E}}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{B}}$ は４つの方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{E}}=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{E}}=-\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{B}}=0$$
$$c^2\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{B}}=-\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

を満たす．これらの式は，$\rho(\boldsymbol{r},t)=0$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$ に対するマクスウェル方程式①v，②，③，④v と同じ形をしている．つまり，$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{E}}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{B}}$ として，電荷と電流が存在しない（真空中の）電場と磁場の解を考えればよい．第 13 章で説明したように，我々はそのような解が，電磁波の解として無数に存在することを知っている．しかし，電磁波の解は，空間の等方性・一様性を破るために許されず，$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r},t)$ と異なる解が存在できないのである．このようにして，物理的解が唯一に定まる．

念のために，第 13 章の電磁波の議論を振り返っておこう．13.1 節では，$\rho(\boldsymbol{r},t)=0$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$ を仮定して電磁波の解を導いた．これは，厳密に言えば数学上の解を簡便に得るための便法である．電磁波が実際に存在するためには，少なくとも過去のどこかの時点で，どこかの場所に，電荷密度または電流密度の時間変化 ― つまり電磁波の源 ― が存在する必要がある．（電磁波の存在に必要な電磁波の源を 13.4 節で扱った．）つまり，$\rho(\boldsymbol{r},t)\neq 0$ または $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\neq\boldsymbol{0}$ が必要である．もし，全宇宙空間の過去から現在に至る全期間にわたって，電荷と電流が厳密に存在しない（$\rho(\boldsymbol{r},t)=0$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$）なら，どんな電場も磁場も（もちろん電磁波も）決して存在できない．それが空間の等方性・一様性の物理的要請である．便宜的に $\rho(\boldsymbol{r},t)=0$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$ とした，13.1 節～13.3 節の議論では，電磁波の源が考えている領域から十分に隔たった遠方にあるために，$\rho(\boldsymbol{r},t)=0$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$ が厳密には成立しなくても，十分良い近似の解が得られると考えるのである．

最後に，ジェフィメンコ方程式(13.24)に $\rho(\boldsymbol{r},t)=0$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$ を代入すれ

ば $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$ となることに注意しよう．このように，ジェフィメンコ方程式(13.24)は，空間の一様性・等方性の物理的要請から生じる帰結を満たしている．13.5 節の最後の“発展”で，電場や磁場が生成する原因は電荷や電流の存在であり，電荷や電流の存在なしに電場や磁場が存在することはないことを強調したが，そのことは，空間の一様性・等方性という物理的要請の結果なのである．

(b)　ポアソン方程式と境界条件

時間変化の無い場合に戻ってポアソン方程式を考え，適切な境界条件が与えられれば，解が唯一に定まることを示そう．

<u>静電気</u>

ある電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ が与えられたとき，(5.8)のポアソン方程式

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{A3.8}$$

の解 $\phi(\boldsymbol{r})$ について考える．ただし，$\rho(\boldsymbol{r})$ は閉曲面 S の内部で与えられており，閉曲面 S の表面上のあらゆる点で静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ の値が定まっているとする．このことを，「閉曲面 S 上で $\phi(\boldsymbol{r})$ の<u>境界条件</u>が与えられている.」という．

境界条件が問題に特別の制約を与えるように思えるかもしれないが，そんなことはない．閉領域 V は有限でも無限でもよく，無限空間を考えるなら，S は半径が ∞ の球面である．何の前提条件もつけないとしても，空間の等方性と一様性の要請から，「半径が ∞ の球面 S 上で $\phi(\boldsymbol{r})$ はゼロ（または一定値）になる」ことを要求してよい．したがって，どんな場合でも，物理的に意味のある問題には，必ず何らかの境界条件が付随する．

さて，S 上で同じ境界条件を満たす(A3.8)の解は１つしかないことを示したいのだが，そのために，仮に解が２つあるとして，その帰結を考えよう．2 つ

の解を $\phi_1(\boldsymbol{r})$ と $\phi_2(\boldsymbol{r})$ と書けば，ϕ_1 と ϕ_2 の差

$$\varsigma = \phi_2 - \phi_1$$

は，$\nabla^2\phi_1 = -\rho/\varepsilon_0$，$\nabla^2\phi_2 = -\rho/\varepsilon_0$ の両辺の差をとることで，

$$\nabla^2\varsigma = 0 \tag{A3.9}$$

を満たすことがわかる．((A3.9)はポアソン方程式の右辺がゼロという特別な場合であり，特にラプラス方程式とよばれる．）ここで，ϕ_1 と ϕ_2 が同一の境界条件を満たすので

$$\varsigma = 0 \qquad (\text{閉曲面S上}) \tag{A3.10}$$

である．

ここで，ς からつくられるベクトル $\boldsymbol{h} = \varsigma\nabla\varsigma$ にガウスの定理，$\int_S \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{h}\,dV$ を適用して

$$\int_V \nabla\cdot(\varsigma\nabla\varsigma)\,dv = \int_S \varsigma\nabla\varsigma\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

と書いてみると，右辺は(A3.10)より閉曲面 S 上で $\varsigma = 0$ なのでゼロである．左辺をベクトル演算の公式(4.10)で変形し，結局

$$\int_V \left\{(\nabla\varsigma)\cdot(\nabla\varsigma) + \varsigma\nabla^2\varsigma\right\} dV = 0$$

を得る．積分内の第１項は $(\nabla\varsigma)^2$ となり，第２項は(A3.9)よりゼロである．

したがって

$$\int_V (\nabla\varsigma)^2\,dV = 0$$

が得られるが，全領域 V での $(\nabla\varsigma)^2$ の体積積分がゼロであるためには，領域内のすべての点で

$$\nabla\varsigma = \boldsymbol{0} \tag{A3.11}$$

でなければならない．これは境界面を含めた全領域で ς が一定値をとることを意味するが，境界面（閉曲面）上で $\varsigma = 0$ であることから，結局，全領域 V

において

$$\varsigma = 0 \tag{A3.12}$$

となることが結論される．つまり，$\phi_1 = \phi_2$ であり，解は１つしか存在しないのである．

このように，考える領域の境界を決める閉曲面 S 上で静電ポテンシャルの値（境界条件）を定めれば，ポアソン方程式の解が一意的に定まり，電場も一意的に決まる．すでに明らかだろうが，点電荷に対するクーロンの電場(5.1)は「半径が∞ の球面 S 上で $\phi =$ 一定 」の境界条件に対応する．また，静電ポテンシャル(5.11)，(5.12)，および(5.13)

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dV' \tag{A3.13}$$

は「半径が∞ の球面 S 上で $\phi = 0$ 」の境界条件のもとで得られるただ１つの解である．

<u>静磁気</u>

ある電流密度の分布 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ が与えられたときのベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の各成分は，ポアソン方程式(9.3)

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2} \tag{A3.14}$$

の解として得られる（ただし，クーロンゲージを採用した）．$\boldsymbol{A}$ の解がただ１つに定まるかどうかの議論は, 上に記した静電気の場合と同様である. つまり, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ が曲面の内部 S で与えられており，S の表面上のあらゆる点でベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の値が与えられれば，ただ１つの解が定まる．ちなみに，解(9.5)

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{\mathrm{V}} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dV' \tag{A3.15}$$

は,「半径が ∞ の球面 S 上で $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 」の境界条件のもとで得られるただ１つの解である.

A.4　$\nabla\times\boldsymbol{h}=\mathbf{0}$ のベクトル場 $\boldsymbol{h}$ は $\boldsymbol{h}=\nabla T$ で表せる

4.4 節の例題 4.2 で，任意のスカラー関数 T に対して

$$\nabla\times(\nabla T)=\mathbf{0}$$

が成り立つことを示した. 以下では, この関係式の逆が成り立つこと, つまり, 空間のあらゆる点で $\nabla\times\boldsymbol{h}=\mathbf{0}$ を満たすベクトル場 $\boldsymbol{h}$ は，あるスカラー関数 T を用いて $\boldsymbol{h}=\nabla T$ と表せることを示す.

$\nabla\times\boldsymbol{h}=\mathbf{0}$ なら，ストークスの定理 $\oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\mathrm{S}}(\nabla\times\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ により，任意の閉曲線 C に沿う循環がゼロである.

$$\oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

ここで，5.2 節の図 5.4 で，クーロン電場 $\boldsymbol{E}$ に対して行った考察の逆をたどろう．つまり，図 5.4(a)のように，閉曲線 C 上の任意の２点 a と b で閉曲線を分割する．図 5.4(b)に示すように，生じる２つの線路 $\Gamma_{\mathrm{ab}}^{(1)}$ と $\Gamma_{\mathrm{ab}}^{(2)}$ に沿う点 a から点 b への $\boldsymbol{h}$ の線積分を，$\int_{\Gamma_{\mathrm{ab}}^{(1)}}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{r}$ と $\int_{\Gamma_{\mathrm{ab}}^{(2)}}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{r}$ で表すと，閉曲線 C の周りの循環は,

$$\oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\Gamma_{\mathrm{ab}}^{(1)}}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{r}-\int_{\Gamma_{\mathrm{ab}}^{(2)}}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{r}$$

と表され，この循環がゼロなので,

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{ab}}^{(1)}}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\Gamma_{\mathrm{ab}}^{(2)}}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{r}$$

がいえる．このことから，任意の点 a から点 b に至る $\boldsymbol{h}$ の線積分の値が，途中の経路にはよらないことがわかる．よって，$\boldsymbol{h}$ の線積分は始点 a と終点 b だけで決まるので，$\int_{\boldsymbol{r}_{\mathrm{a}}}^{\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}}\boldsymbol{h}\cdot d\boldsymbol{r}$ と表してよい．そこで始点の位置ベクトルを固定して $\boldsymbol{r}_0$ で表し，終点の位置ベクトルを変数 $\boldsymbol{r}$ とすれば，その線積分は変数 $\boldsymbol{r}$ で決まるスカラー関数

$$T(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{A4.1}$$

となる．

ここで，位置ベクトルが微小変位 $\Delta\boldsymbol{r}$ だけ隔たった２つの位置 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ の間の T の値の差

$$T(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - T(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{r} - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{r}$$

を考える．左辺は(3.3)より，$T(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - T(\boldsymbol{r}) = \nabla T \cdot \Delta\boldsymbol{r}$ であり，右辺は $\boldsymbol{h}$ の $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ に至る微小区間での変化が無視できて

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{r} - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{h} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$$

となるので，左辺と右辺を比べることで

$$\boldsymbol{h} = \nabla T \tag{A4.2}$$

を得る．

このように，$\nabla \times \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ を満たすベクトル場 $\boldsymbol{h}$ から，(A.1)によってスカラー関数 T を導くことができ，$\boldsymbol{h}$ はこの T のグラディエントで表される．(A.1)における固定点 $\boldsymbol{r}_0$ はどこに選んでもよく，(A4.2)の結果には影響しない．

A.５　$\nabla\cdot\boldsymbol{h}=0$ のベクトル場 $\boldsymbol{h}$ は $\boldsymbol{h}=\nabla\times A$ で表せる

4.4 節の例題 4.2 の下の段落で，任意のベクトル $\boldsymbol{h}$ に対して

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{h})=0$$

.が成り立つことを述べた．以下では，この関係式の逆が成り立つこと，つまり，空間のあらゆる場所で $\nabla\cdot\boldsymbol{h}=0$ を満たすベクトルに対して，$\boldsymbol{h}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ となるベクトル $\boldsymbol{A}$ が存在することを示す.

$\boldsymbol{h}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ となるベクトル $\boldsymbol{A}$ が見つかったとすると，両辺のローテーションをとり，$\nabla\times\boldsymbol{h}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$ をベクトル解析の公式で変形して

$$\nabla\times\boldsymbol{h}=-\nabla^2\boldsymbol{A}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \tag{A5.1}$$

を得る．(A5.1)は $\boldsymbol{A}$ が満たすべき必要条件である．もし，(A5.1)の右辺第２項が無視できるなら，

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\nabla\times\boldsymbol{h} \tag{A5.2}$$

となり，この式の各成分がポアソン方程式(5.8)となっているために，(A5.2)の解として，ポアソン方程式の解(5.13)にならって，ただちに

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{A5.3}$$

を得る（$r\to\infty$ で $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{0}$ の条件を課している）．なお，右辺の ∇' は，変数 $\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$ に作用する.

実は，(A5.3)の $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{h}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ を満たす．そのことを，(A5.3)のローテーションを計算して示すことができるが，それは別解として後で示すことにして，まずここでは，少し違ったやり方でよりスマートに示そう.

(A5.3)で与えられる $\boldsymbol{A}$ は(A5.2)の解だが，実は(A5.1)の解でもある．まず，そのことを以下で示そう.

(A5.2)の両辺のダイバージェンスをとると，右辺が消えて $\nabla\cdot\nabla^2\boldsymbol{A}=0$ とな

るが，∇^2 はスカラー演算子なので $\nabla\cdot$ と順番を入れ替えることができ，

$$\nabla^2(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=0 \tag{A5.4}$$

となる．これもポアソン方程式（特に，右辺がゼロなのでラプラス方程式とよばれる）であり，解(5.13)にならって

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{A5.5}$$

を得る．したがって，(A5.3)の $\boldsymbol{A}$ は(A5.1)の解であり，$\nabla\times\boldsymbol{h}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$，つまり

$$\nabla\times\left\{\boldsymbol{h}-(\nabla\times\boldsymbol{A})\right\}=\boldsymbol{0} \tag{A5.6}$$

を満たす．ここで，ローテーションがゼロのベクトルは，必ずあるスカラー関数のグラディエントで表せる(A.4)ことにより，スカラー関数 T を用いて

$$\boldsymbol{h}=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla T \tag{A5.7}$$

と表せる．

さらに，両辺のダイバージェンスをとると，$\nabla\cdot\boldsymbol{h}=0$ であることが効いて

$$\nabla^2 T=0 \tag{A5.8}$$

となる．これは再びポアソン方程式(ラプラス方程式)となり，解(5.13)にならって $T=0$ を得る．その結果，(A5.7)より

$$\boldsymbol{h}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{A5.9}$$

となる．

以上で，(A5.3)の $\boldsymbol{A}$ が(A5.9)を満たすことが示された．

[別解]　ローテーションの計算による証明

(A5.3)の $\boldsymbol{A}$ を xyz 成分で表し，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ の z 成分に注目すると，

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\left(\frac{\partial h_x}{\partial z'}-\frac{\partial h_z}{\partial x'}\right)dV'-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\left(\frac{\partial h_z}{\partial y'}-\frac{\partial h_y}{\partial z'}\right)dV' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\left(\frac{\partial h_x}{\partial z'}-\frac{\partial h_z}{\partial x'}\right)dV'+\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\left(\frac{\partial h_z}{\partial y'}-\frac{\partial h_y}{\partial z'}\right)dV'
\end{aligned}
$$

となる．ただし，式に出てくる $\partial h_z/\partial y'$ 等はすべて $\boldsymbol{r}'$ の関数であり，$\boldsymbol{r}$ の関数ではないことと，

$$
\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=-\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}
$$

と書けることを用いた．ここで，$dV'=dx'dy'dz'$ と書けることと，部分積分により

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{A})_z = &\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial h_x}{\partial z'}-\frac{\partial h_z}{\partial x'}\right)dx'dy'dz' \\
&-\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial h_z}{\partial y'}-\frac{\partial h_y}{\partial z'}\right)dx'dy'dz'
\end{aligned}
$$

となる．ただし，

$$
\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\left(\frac{\partial h_x}{\partial z'}-\frac{\partial h_z}{\partial x'}\right)\right]_{x'=-\infty}^{x'=\infty}dy'dz'=0
$$

$$
\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\left(\frac{\partial h_z}{\partial y'}-\frac{\partial h_y}{\partial z'}\right)\right]_{y'=-\infty}^{y'=\infty}dx'dz'=0
$$

に注意する．さらに変形して，

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_z=\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial h_x}{\partial x'}+\frac{\partial h_y}{\partial y'}+\frac{\partial h_z}{\partial z'}\right)dx'dy'dz'$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\left(\frac{\partial^2 h_z}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 h_z}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 h_z}{\partial z'^2}\right)dx'dy'dz'$$

とし，題意の条件$\nabla\cdot\boldsymbol{h}=0$を用いれば，$\nabla'^2 h_z=\dfrac{\partial^2 h_z}{\partial x'^2}+\dfrac{\partial^2 h_z}{\partial y'^2}+\dfrac{\partial^2 h_z}{\partial z'^2}$として

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_z=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'^2 h_z}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

が得られる．

ここで，任意の電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ のつくる静電ポテンシャルが $\phi(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$ で表され，これがポアソン方程式$\nabla^2\phi=-\rho/\varepsilon_0$ の解であることを思い出せば，$\phi(\boldsymbol{r})$ が必ず

$$\phi(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'^2\phi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

を満たすことがわかる．

どんなスカラー関数 $\phi(\boldsymbol{r})$（ただし $r\to\infty$ で $\phi(\boldsymbol{r})\to 0$ ）に対してもこの等式が成り立つことから，

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_z=h_z$$

を得る．x ，y 成分についても同様に$(\nabla\times\boldsymbol{A})_x=h_x$，$(\nabla\times\boldsymbol{A})_y=h_y$ となり，

$$\boldsymbol{h}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

が導かれる．

A.6　ファラデーの電磁誘導の法則

第 12 章の 12.2 節で，磁束 $\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$（閉曲線 C を縁とする曲面 S を貫く）の時間変化が，磁場の時間変化に起因する場合も，閉曲線 C の変形や運動に起因する場合も，どちらも

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

で表されることを示した．以下では，それをさらに直接的に示すとともに，マクスウェル方程式②の積分形が，閉曲線 C が時間変化する場合を想定していないことを明確にしておく．

磁場も閉曲線 C も，ともに時間変化する場合，一般に磁束の時間変化率は

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\,dS + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\Delta\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS}{\Delta t} \tag{A6.1}$$

のように，磁場の時間変化による寄与（右辺第 1 項）と，閉曲線 C の時間変化による寄与（右辺第 2 項）の和で表される．右辺第 2 項の $\int_{\Delta\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ は，図 A6.1 のように，

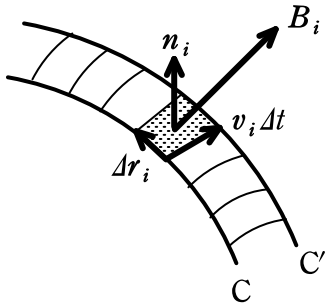


図 A6.1

微小時間 Δt の間に閉曲線が C から C′ に変化したとき， C と C′ に囲まれる曲面 ΔS を貫く磁束

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i\right)\right\}$$

である. ただし，C を多数の微小区間に分割したときの, i 番目($i=1,2,\cdots,N$)の微小区間をベクトル $\Delta\boldsymbol{r}_i$，その速度を $\boldsymbol{v}_i$ としている.

ここで，i 番目の微小面積の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_i$，大きさを ΔS_i とすると，$\boldsymbol{n}_i\Delta S_i = \boldsymbol{v}_i\Delta t\times\Delta\boldsymbol{r}_i$ と書けること, および $\boldsymbol{B}_i\cdot(\boldsymbol{v}_i\times\Delta\boldsymbol{r}_i) = -(\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i$ に注意して

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}_i\right)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i\right\}\Delta t$$

と書き直し，両辺を Δt で割って $\Delta t\to 0$ の極限をとると，(A6.1)の右辺第２項は結局,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\Delta S}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS}{\Delta t} = -\oint_{C}\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot d\boldsymbol{r}$$

となる.

したがって，(A6.1)は

$$\frac{d}{dt}\int_{S}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_{S}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\,dS - \oint_{C}\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{(A6.2)}$$

となる.

さて，ここで，マクスウェル方程式②の微分形

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

に対する，曲面 S (閉曲線 C を縁とする)を貫く流束を考えると,

$$\int_{S}(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -\int_{S}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

となり，左辺にストークスの定理を適用すれば

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{A6.3}$$

を得る．これに(A6.2)を用いると，

$$\oint_{\mathrm{C}} (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\, dS \tag{A6.4}$$

が導かれる．

この式の左辺は閉回路 C に生じる誘導起電力 ε であり，右辺は磁場が変化する場合と C が変化する場合の双方を含む磁束 $\Phi = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$ の時間変化率であり，一般に

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

が成立することが示された．

ちなみに，(A6.1)と(A6.3)より，磁場と閉曲線 C の双方が時間変化する場合に成立する一般式は

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\, dS + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\, dS}{\Delta t} \tag{A6.5}$$

である．この式は，明らかにマクスウェル方程式②の積分形

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$$

と異なる．このように，マクスウェル方程式②の積分形は，閉曲線 C が時間変化しない場合を想定しており，C が時間変化する場合には，②は成立せず，(A6.5)が正しい関係式となる．ちなみにマクスウェル方程式②の積分形として

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} == -\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

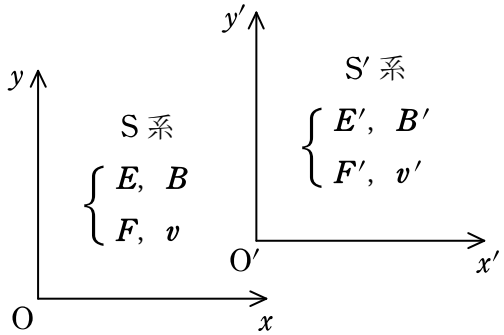
を採用すれば，このような混乱はない．②の微分形はこの後者の式に等価であり，②の微分形からは混乱が生じないことを付記しておく．

A. 7　動くループにおける磁場と電場の変換

12.2 節では，磁場中で動くループに生じる起電力を，磁場による力 $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ から導いた．

特殊相対性理論によれば，磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を速度 $\boldsymbol{v}$ で動く座標系には，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ に比例した電場 $\boldsymbol{E}'$ が生じる．以下では，特殊相対論の効果によって生じる電場による力 $q\boldsymbol{E}'$ から起電力を求め，結果が一致することを示す．

まず，相対論による変換則を述べよう．図 A7. 1 のように，xyz 座標系で表すある慣性系(S 系)に電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が存在し，そこに速度 $\boldsymbol{v}$ で動く電荷 q があって力 $\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ を受けているとする．このとき，S 系に対して相対速度 $\boldsymbol{u}$ で運動する，$x'y'z'$ 座標系で表す別の慣性系(S′ 系)における電場 $\boldsymbol{E}'$ と磁場 $\boldsymbol{B}'$ はそれぞれ $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ とは異なり，



S′系：S 系に対して速度 $\boldsymbol{u}$ で運動

図 A7. 1

$$\begin{cases} E'_{//}=E_{//} \\ \boldsymbol{E}'_{\perp}=\dfrac{\boldsymbol{E}_{\perp}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}_{\perp}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_{//}=B_{//} \\ \boldsymbol{B}'_{\perp}=\dfrac{\boldsymbol{B}_{\perp}-(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{E}_{\perp})/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases} \tag{A7.1}$$

に変換される．ただし，速度 $\boldsymbol{u}$ に平行な成分と，垂直な成分をそれぞれ下付きの$//$と$\perp$で表している（c は光速）．

なお，S′系での電荷 q が受ける力は，S′系での速度を $\boldsymbol{v}'$ として，$\boldsymbol{F}' = q(\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}')$ となる．また，一般に，粒子に対してS 系ではたらく力 $\boldsymbol{F}$ と S′ 系ではたらく力 $\boldsymbol{F}'$ の間には

$$\begin{cases} F'_{//} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \sqrt{\dfrac{1-(v'/c)^2}{1-(v/c)^2}} \left(F_{//} - \dfrac{1}{c}\dfrac{u}{c} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \right) \\ \boldsymbol{F}'_{\perp} = \sqrt{\dfrac{1-(v'/c)^2}{1-(v/c)^2}} \boldsymbol{F}_{\perp} \end{cases} \tag{A7.2}$$

の関係がある． S 系，S′ 系とも慣性系でありながら，受ける力が $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{F}'$ で異なるのは，時間の進み方が慣性系によって異なる（固有時の）効果と，ローレンツ短縮と呼ばれる効果による．

(a)　磁場中を導体棒が動く場合

例題 12.1 の単純な例（図 A7.2）をまず考える．一様で時間変化しない $+z$ 方向の磁場 $\boldsymbol{B}$ の中で，xy 面上の閉回路の一部の y 方向に置かれた長さ l の導体棒 a が，$+x$ 方向に速さ v で動いており，電場はゼロ（$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$）である．

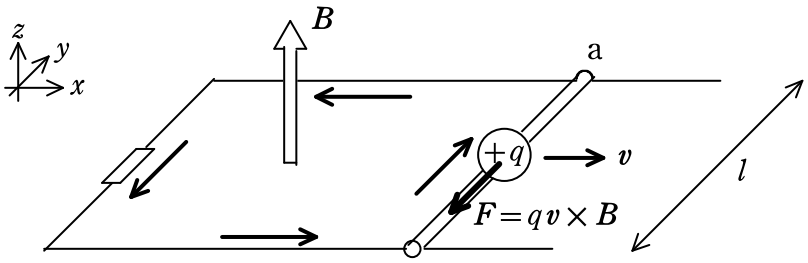


図 A7.2

S 系として実験室系(図 A7.2 の xyz 座標系)を考えれば $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)=(0,\,0,\,0)$，$\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)=(0,\,0,\,B)$ であり，S 系から見た導体棒 a 中の電荷 q が受ける力は磁場からの寄与,

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

になる．以下では，導体棒 a とともに $+x$ 方向に速度 v で動く $x'y'z'$ 座標系（S′系）でこの現象を観察することを考える．S′ 系では，速度 $\boldsymbol{u}$ に平行な成分が x 成分であること，および $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}=(v,\,0,\,0)$，$\boldsymbol{v}'=(0,\,0,\,0)$ に注意して，(A7.1)からS′系における電場と磁場がただちに

$$\boldsymbol{E}'=\left(0,\,-\frac{vB}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\,0\right),\qquad \boldsymbol{B}'=\left(0,\,0,\,\frac{B}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)$$

と求まる.

S′系で導体棒 a 中の電荷 q が受ける力 $\boldsymbol{F}'=q(\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}')$ に対する磁場の寄与は $\boldsymbol{v}'=(0,\,0,\,0)$ より消失し，電場による項

$$\boldsymbol{F}'=q\boldsymbol{E}'=\left(0,-\frac{qvB}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\,0\right) \tag{A7.3}$$

だけが得られる.

さて，いまここで求めているのは図 7.2 の閉回路 C に生じる誘導起電力である．つまり，長さ l の導体棒 a に固定した座標系（S′系）ではなく，導体棒が速さ v で動く座標系（S 系）で測った起電力である．したがって，ここで求めた S′ 系における力を, (A7.2)を使って S 系での力に変換しなければならない. ここで，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}=(v,\,0,\,0)$，$\boldsymbol{v}'=(0,\,0,\,0)$，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=F_{//}v$ に注意し, (A7.2)から得られる $F_{//}=F'_{//}$，$\boldsymbol{F}_{\perp}=\sqrt{1-(v/c)^2}\,\boldsymbol{F}'_{\perp}$ と(A7.3)から

$$\boldsymbol{F}=(0,-qvB,0) \tag{A7.4}$$

が導かれる．このように，導体棒 a 中の電荷の受ける力は，S 系で磁場によ

る力を考えた場合と同じである．

回路の，導線棒 a 以外の部分はS 系で $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ なので，(A7.2)よりS′系でも $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{0}$ であり，起電力には寄与しない．（導線棒 a と向かい合う反対側の回路部分は，S′系では速度 $\boldsymbol{v}'=(-v,\,0,\,0)$ で動くが，そのために生じる磁場による力 $q\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}'$ が，電場による力 $q\boldsymbol{E}'$ と打ち消し合うのである．）

このように，誘導起電力として

$$\varepsilon=-\frac{qvBl}{q}=-vBl$$

が得られ，S 系での磁場による力で生じる起電力と同一の結果となる．

(b)　一般の場合

任意の形の閉ループ C が，図 A7.3（または図 12.3）のように，任意の変形や並進運動を行う一般の場合を考えよう．磁場 $\boldsymbol{B}$ は場所の関数でよい．簡単のために電場はゼロとする．

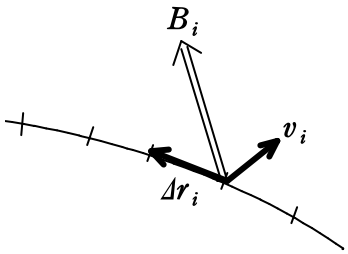


図 A7.3

ループ C を多数の微小区間に分割し，i 番目($i=1,2,\cdots,N$)の微小区間（$\Delta\boldsymbol{r}_i$ で表す）が速度 $\boldsymbol{v}_i$ で動くとする．ただし，その場所での磁場を $\boldsymbol{B}_i$ とする．（$\Delta\boldsymbol{r}_i$ に対する $\boldsymbol{v}_i$ と $\boldsymbol{B}_i$ の向きは任意である．）閉ループ C に沿って導線が置かれており，それぞれの微小区間 $\Delta\boldsymbol{r}_i$ において，導線とともに速度 $\boldsymbol{v}_i$

で動く電荷 q にとって，現象がどのように見えるかを考える．

もとの実験室系が S 系である．i 番目の微小区間とともに動く座標系を S'_i 系とよび，S'_i 系での電場，磁場を $\boldsymbol{E}'_i$，$\boldsymbol{B}'_i$ とする．S'_i 系では電荷 q が静止するため磁場 $\boldsymbol{B}'_i$ による力はゼロであり，電場 $\boldsymbol{E}'_i$ による力

$$\boldsymbol{F}'_i = q\,\boldsymbol{E}'_i$$

だけがはたらく．

$\boldsymbol{E}'_i$ を求めよう．S 系(実験室系)で $\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}_{i\perp} = \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}_i$ となることに注意すると，$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i$ と(A7.1)よりただちに

$$E'_{i//} = 0$$

と

$$\boldsymbol{E}'_{i\perp} = \frac{\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}_i}{\sqrt{1-(v_i/c)^2}}$$

を得る．ただし，$\boldsymbol{v}_i$ に平行な成分を下付きの//，垂直な成分を⊥で表す．まとめて，

$$\boldsymbol{E}'_i = \frac{\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}_i}{\sqrt{1-(v_i/c)^2}} \tag{A7.5}$$

を得る．したがって，電荷 q はS'_i 系では電場から力

$$\boldsymbol{F}'_i = q\boldsymbol{E}'_i = q\frac{\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}_i}{\sqrt{1-(v_i/c)^2}} \tag{A7.6}$$

を受ける．

“S 系で測った誘導起電力”を導くために，(A7.2)を用いてS 系における力 $\boldsymbol{F}_i$ に変換する．速度 $\boldsymbol{v}_i$ の向きに x 軸を選んで，$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i = (v_i, 0, 0)$，$\boldsymbol{v}'_i = (0,0,0)$ とし，それぞれ $\boldsymbol{v}_i$ に平行な成分を//，垂直な成分を⊥で表す．(A7.3)より，$\boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = F_{i//} v_i$ に注意して，$F'_{i//} = F_{i//}$ および

$$\boldsymbol{F}_{i\perp} = \sqrt{1-(v_i/c)^2}\,\boldsymbol{F}'_{i\perp} \tag{A7.7}$$

を得る．ここで，(A7.6)より $F'_{i//} = 0$ に注意すれば，$F_{i//} = 0$ となり，ここから $\boldsymbol{F}'_i = \boldsymbol{F}'_{i\perp}$，$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_{i\perp}$ と表せて，そのため(A7.7)より

$$\boldsymbol{F}_i = \sqrt{1-(v_i/c)^2}\,\boldsymbol{F}'_i \tag{A7.8}$$

となる．よって，(A7.6)に注意して

$$\boldsymbol{F}_i = q\,\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}_i$$

が導かれる．

この結果は，各微小区間ごとに，S 系における磁場からの力と同じ結果が得られることを意味しており，閉曲線 C に沿って微小区間の和をとることで，誘導起電力

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

を与える．

このように，誘導起電力をもたらす力の原因は，S 系で考えれば磁場だが，閉回路の各場所ごとに定義される（回路とともに動く）S′ 系から見れば，電場である．どちらの見方も同じ結果を与え，等価であることが示された．

A.8　複素指数関数

任意の複素数 $\varsigma = a + ib$（a，b は実数，i は虚数）に対して

$$e^{\varsigma} = 1 + \varsigma + \frac{1}{2!}\varsigma^2 + \frac{1}{3!}\varsigma^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\varsigma^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varsigma^n$$

で定義される関数は**複素指数関数**とよばれ，以下の①～⑥の性質をもつ．

① $e^{\varsigma} = e^{a+ib} = e^{a} \cdot e^{ib}$

② $e^{\varsigma_1} \cdot e^{\varsigma_2} = e^{\varsigma_1 + \varsigma_2}$

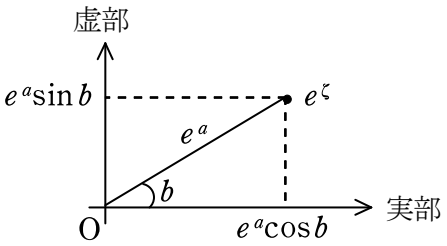
③ $e^{ib} = \cos b + i \sin b$　（b は実数）

④ $\cos b = \dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}$，$\sin b = \dfrac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}$

⑤ 複素数 $e^{\varsigma} = e^{a+ib} = e^{a} \cdot e^{ib}$ を複素平面上で表すと，図のように原点からの距離が e^{a} で，実軸からの偏角が b（ラジアン）の点になる．つまり，$e^{\varsigma} = x + iy$（x，y は実数，i は虚数）としたとき

$$\begin{cases} x = e^{a}\cos b \\ y = e^{a}\sin b \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} e^{a} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan b = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

である．



⑥ 実数の指数関数と同様，$\dfrac{de^{\varsigma}}{d\varsigma} = e^{\varsigma}$ が成立する．

上記の性質を導く.

① $e^{\varsigma}=e^{a+ib}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+ib)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!k!}a^k(ib)^{n-k}\right\}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k(ib)^{n-k}}{k!(n-k)!}\right\}$

一方，$e^a\cdot e^{ib}=\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\right\}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(ib)^l}{l!}\right\}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^m(ib)^l}{m!l!}$ で，$m+l=n$ となる項をまとめて書いて　$e^a\cdot e^{ib}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{n}\frac{a^m(ib)^{n-m}}{m!(n-m)!}\right\}$ を得る.

② $\varsigma_1=a_1+ib_1$，$\varsigma_2=a_2+ib_2$ として，

$e^{\varsigma_1}e^{\varsigma_2}=e^{a_1}e^{ib_1}e^{a_2}e^{ib_2}=e^{a_1}e^{a_2}e^{ib_1}e^{ib_2}=e^{a_1+a_2}e^{i(b_1+b_2)}=e^{\varsigma_1+\varsigma_2}$

③ $e^{ib}=1+ib+\frac{1}{2!}(ib)^2+\frac{1}{3!}(ib)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(ib)^n+\cdots$　の奇数番目と偶数番目の項をまとめて，

$e^{ib}=\left(1-\frac{1}{2!}b^2+\frac{1}{4!}b^4-\frac{1}{6!}b^6+\cdots\right)+i\left(b-\frac{1}{3!}b^3+\frac{1}{5!}b^5-\cdots\right)$

$=\cos b+i\sin b$

④　③より導かれる.

⑤ $e^{\varsigma}=e^a e^{ib}=e^a(\cos b+i\sin b)$

⑥　複素数変数による微分は実数の場合と同様に，$\frac{de^{\varsigma}}{d\varsigma}=\lim_{\Delta\varsigma\to 0}\frac{e^{\varsigma+\Delta\xi}-e^{\varsigma}}{\Delta\varsigma}$ で定義されるが，$\Delta\varsigma=\Delta a+i\Delta b$ として，$\Delta\varsigma\to 0$ とする際に $\Delta a\to 0$，$\Delta b\to 0$ のやり方に関わらず，$\frac{e^{\varsigma+\Delta\varsigma}-e^{\varsigma}}{\Delta\varsigma}$ が 1 つの値に収束しなければならない.

$$\frac{de^{\xi}}{d\varsigma}=\lim_{\Delta\varsigma\to 0}\frac{e^{\varsigma}(e^{\Delta\varsigma}-1)}{\Delta\varsigma}=\lim_{\Delta\varsigma\to 0}\frac{e^{\varsigma}}{\Delta\varsigma}\left\{\left(1+\Delta\varsigma+\frac{1}{2!}(\Delta\varsigma)^2+\frac{1}{3!}(\Delta\varsigma)^3+\cdots\right)-1\right\}$$

$$=\lim_{\Delta\varsigma\to 0}e^{\varsigma}\left(1+\Delta\varsigma+\frac{1}{2!}(\Delta\varsigma)^2+\frac{1}{3!}(\Delta\varsigma)^3+\cdots\right)=e^{\varsigma}$$

最後の等号は，$\Delta\varsigma\to 0$（$\Delta a\to 0$，$\Delta b\to 0$）のやり方によらずに成立する．