第1章 章末問題解答

【1-1】 $\ddot{x}+4x=0$ ･･･①

（１）合成関数の微分法を用いて，$x=2\sin(2t+1)$ を t で微分すると，$\dot{x}=4\cos(2t+1)$，$\ddot{x}=-8\sin(2t+1)$ となる．これらを式①の左辺に代入すると
$\ddot{x}+4x=-8\sin(2t+1)+4\cdot 2\sin(2t+1)=0$ となり，常に式①のイコールが成り立つから $x=2\sin(2t+1)$ は，式①の解である．

（２）合成関数の微分法を用いて，$x=2e^{2t+1}$ を t で微分すると，$\dot{x}=4e^{2t+1}$，$\ddot{x}=8e^{2t+1}$ となる．これらを式①の左辺に代入すると，$\ddot{x}+4x=8e^{2t+1}+4\cdot 2e^{2t+1}=16e^{2t+1}\neq 0$ となり，式①のイコールが成り立たないから $x=2e^{2t+1}$ は，式①の解ではない．

（３）合成関数の微分法を用いて，$x=e^{i(2t+1)}$ を t で微分すると，$\dot{x}=2ie^{i(2t+1)}$，$x=2i\cdot 2ie^{i(2t+1)}=-4e^{i(2t+1)}$ となる．これらを式①の左辺に代入すると $\ddot{x}+4x=-4e^{i(2t+1)}+4\cdot e^{i(2t+1)}=0$ となり，常に式①のイコールが成り立つから $x=e^{i(2t+1)}$ は，式①の解である．

【1-2】

（１） $\ddot{x}+x=0$

λ を未定定数として $x=e^{\lambda t}$ （$e^{\lambda t}\neq 0$）とおき，合成関数の微分法を用いて t で微分すると $\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$，$\ddot{x}=\lambda^2 e^{\lambda t}$ となる．これらを元の微分方程式に代入して特性方程式を得る．

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+e^{\lambda t}=0$$
$$(\lambda^2+1)e^{\lambda t}=0$$
$$\lambda^2+1=0 \quad \text{（特性方程式）} \qquad \therefore \lambda=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

特性方程式の解を $\lambda_1=i$，$\lambda_2=-i$ とすれば，２つの特解は $x_1=e^{it}$，$x_2=e^{-it}$ となる．A と B を任意の定数として解の和も解であることを用いると，一般解は次のように書くことができる．

$$x=Ae^{it}+Be^{-it}$$

オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を適用すると次のようになる．

$$x=A(\cos t+i\sin t)+B\{\cos(-t)+i\sin(-t)\}=A(\cos t+i\sin t)+B(\cos t-i\sin t)$$
$$=(A+B)\cos t+i(A-B)\sin t$$

なお，$\cos(-t)=\cos t$，$\sin(-t)=-\sin t$ を用いた．

ここで x が実数であるためには $A+B$ および $i(A-B)$ はともに実数でなければならない．c_1 と c_2 を実数として $c_1=A+B$，$c_2=i(A-B)$ とおくと，一般解は

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t$$

となる．さらに，c_1 と c_2 を $c_1=a\sin\varphi$，$c_2=a\cos\varphi$，$a=\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}$ によって a と φ に変換すると，三角関数の加法定理 $\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)$ を用いて，与式の一般解は次のように１つの三角関数にまとめることができる．

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t=a\sin\varphi\cos t+a\cos\varphi\sin t=a\sin(t+\varphi) \qquad \text{（}a\text{ と }\varphi\text{ は任意の実数）}$$

（2）　$\ddot{x}+3x=0$

λ を未定定数として $x=e^{\lambda t}$　（$e^{\lambda t}\neq 0$）とおき，合成関数の微分法を用いて t で微分すると $\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$，$\ddot{x}=\lambda^2 e^{\lambda t}$ となる．これらを元の微分方程式に代入して特性方程式を得る．

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+3e^{\lambda t}=0$$
$$\left(\lambda^2+3\right)e^{\lambda t}=0$$
$$\lambda^2+3=0 \quad \text{（特性方程式）} \qquad \therefore \lambda=\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$$

特性方程式の解を $\lambda_1=\sqrt{3}i$，$\lambda_2=-\sqrt{3}i$　とすれば，２つの特解は $x_1=e^{\sqrt{3}it}$，　$x_2=e^{-\sqrt{3}it}$ となる．A と B を任意の定数として解の和も解であることを用いると，一般解は次のように書くことができる．

$$x=Ae^{\sqrt{3}it}+Be^{-\sqrt{3}it}$$

オイラーの公式　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　を適用すると次のようになる．

$$\begin{aligned}x&=A\left(\cos\sqrt{3}t+i\sin\sqrt{3}t\right)+B\left\{\cos\left(-\sqrt{3}t\right)+i\sin\left(-\sqrt{3}t\right)\right\}\\&=A\left(\cos\sqrt{3}t+i\sin\sqrt{3}t\right)+B\left(\cos\sqrt{3}t-i\sin\sqrt{3}t\right)\\&=\left(A+B\right)\cos\sqrt{3}t+i\left(A-B\right)\sin\sqrt{3}t\end{aligned}$$

なお，$\cos\left(-\sqrt{3}t\right)=\cos\sqrt{3}t$，$\sin\left(-\sqrt{3}t\right)=-\sin\sqrt{3}t$ を用いた．

ここで x が実数であるためには $A+B$　および　$i\left(A-B\right)$ はともに実数でなければならない．c_1 と c_2 を実数として $c_1=A+B$，　$c_2=i\left(A-B\right)$ とおくと，一般解は

$$x=c_1\cos\sqrt{3}t+c_2\sin\sqrt{3}t$$

となる．さらに，c_1 と c_2 を $c_1=a\sin\varphi$，　$c_2=a\cos\varphi$，$a=\sqrt{{c_1}^2+{c_2}^2}$　によって a と φ に変換すると，三角関数の加法定理　$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin\left(x+y\right)$　を用いて，与式の一般解は次のように１つの三角関数にまとめることができる．

$$x=c_1\cos\sqrt{3}t+c_2\sin\sqrt{3}t=a\sin\varphi\cos\sqrt{3}t+a\cos\varphi\sin\sqrt{3}t=a\sin\left(\sqrt{3}t+\varphi\right)$$

（a と φ は任意の実数）

（3）　$2\ddot{x}+3x=0$　を次のように変形して，　$\ddot{x}+\dfrac{3}{2}x=0$　上記の（1）と（2）と同様に解くと，一般解は a と φ は任意の実数として，$x=a\sin\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}t+\varphi\right)$　となる．

【1-3】　$\ddot{x}+6\pi\dot{x}+25\pi^2x=0$　・・・①

積の微分法および合成関数の微分法を適用して $x=e^{-3\pi t}\cdot\sin\left(4\pi t\right)$ を t で微分する．

$$\dot{x}=-3\pi e^{-3\pi t}\cdot\sin\left(4\pi t\right)+4\pi e^{-3\pi t}\cdot\cos\left(4\pi t\right)$$
$$\begin{aligned}\ddot{x}&=9\pi^2e^{-3\pi t}\cdot\sin\left(4\pi t\right)-12\pi^2e^{-3\pi t}\cdot\cos\left(4\pi t\right)-12\pi^2e^{-3\pi t}\cdot\cos\left(4\pi t\right)-16\pi^2e^{-3\pi t}\cdot\sin\left(4\pi t\right)\\&=-7\pi^2e^{-3\pi t}\cdot\sin\left(4\pi t\right)-24\pi^2e^{-3\pi t}\cdot\cos\left(4\pi t\right)\end{aligned}$$

これらを式①の左辺に代入すると，

$$\ddot{x}+6\pi\,\dot{x}+25\pi^2x=-7\pi^2e^{-3\pi\,t}\sin(4\pi t)-24\pi^2e^{-3\pi\,t}\cos(4\pi t)$$
$$+6\pi\left(-3\pi e^{-3\pi\,t}\sin(4\pi t)+4\pi e^{-3\pi\,t}\cos(4\pi t)\right)+25\pi^2\left(e^{-3\pi\,t}\sin(4\pi t)\right)$$
$$=(-7-18+25)\pi^2e^{-3\pi\,t}\sin(4\pi t)+(-24+24)\pi^2e^{-3\pi\,t}\cos(4\pi t)=0$$

となり，常に式①のイコールが成り立つから　$x=e^{-3\pi\,t}\sin(4\pi t)$ は与式の解である．

【1-4】

（1）$\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0$

$x=e^{\lambda t}$　（$e^{\lambda t}\neq 0$）とおき，合成関数の微分法を用いて t で微分すると $\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$，$\ddot{x}=\lambda^2e^{\lambda t}$ である．これらを元の微分方程式に代入すると，$\lambda^2e^{\lambda t}+2\lambda e^{\lambda t}+5e^{\lambda t}=0$　である．したがって，特性方程式は，$\lambda^2+2\lambda+5=0$　となる．2次方程式の解の公式より，$\lambda=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{-2\pm4i}{2}-1\pm2i$ となる．$\lambda_1=-1+2i$，$\lambda_2=-1-2i$ とすれば，２つの特解は $x_1=e^{(-1+2i)\,t}$，$x_2=e^{(-1-2i)\,t}$ となる．A，B を任意の定数として解の和も解であることを用いると，一般解は次のように書くことができる．

$$x=Ax_1+Bx_2=Ae^{(-1+2i)\,t}+Be^{(-1-2i)\,t}=Ae^{-t+2it}+Be^{-t-2it}$$
$$=Ae^{-t}e^{2it}+Be^{-t}e^{-2it}=e^{-t}\left(Ae^{2i\,t}+Be^{-2i\,t}\right)$$

オイラーの公式　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　を適用すると次のようになる．

$$x=e^{-t}\{A(\cos2t+i\sin2t)+B(\cos(-2t)+i\sin(-2t))\}=e^{-t}\{A(\cos2t+i\sin2t)+B(\cos2t-i\sin2t)\}$$
$$=e^{-t}\{(A+B)\cos2t+i(A-B)\sin2t\}$$

なお，$\cos(-2t)=\cos2t$，$\sin(-2t)=-\sin2t$ を用いた．

ここで x が実数であるためには $A+B$　および　$i(A-B)$ はともに実数でなければならない．c_1 と c_2 を実数として　$c_1=A+B$，　$c_2=i(A-B)$　とおくと，一般解は

$$x=e^{-t}(c_1\cos2t+c_2\sin2t)$$

となる．（　）内を１つの三角関数に合成するために，$c_1=a\sin\varphi$，$c_2=a\cos\varphi$，$a=\sqrt{c_1{}^2+c_2{}^2}$ とすれば，一般解は次のように書くことができる．

$$x=e^{-t}(a\sin\varphi\cos2t+a\cos\varphi\sin2t)$$
$$=ae^{-t}(\sin\varphi\cos2t+\cos\varphi\sin2t)=ae^{-t}\sin(2t+\varphi)$$

（a と φ は任意の実数）

（2）$\ddot{x}+6\dot{x}+10x=0$

$x=e^{\lambda t}$　（$e^{\lambda t}\neq 0$）とおき，合成関数の微分法を用いて t で微分すると $\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$，$\ddot{x}=\lambda^2e^{\lambda t}$ である．これらを元の微分方程式に代入すると，$\lambda^2e^{\lambda t}+6\lambda e^{\lambda t}+10e^{\lambda t}=0$　である．したがって，特性方程式は，$\lambda^2+6\lambda+10=0$　となる．2次方程式の解の公式より $\lambda=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1}=\dfrac{-6\pm\sqrt{-4}}{2}=-3\pm i$　となる．

$\lambda_1=-3+i$，$\lambda_2=-3-i$ とすれば，２つの特解は $x_1=e^{(-3+i)\,t}$，$x_2=e^{(-3-i)\,t}$ となる．A，B を任意の定数として解の和も解であることを用いると，一般解は次のように書くことができる．

$$x = Ax_1 + Bx_2 = Ae^{(-3+i)\ t} + Be^{(-3-i)\ t} = Ae^{-3t+it} + Be^{-3t-it}$$
$$= Ae^{-3t}e^{it} + Be^{-3t}e^{-it} = e^{-3t}\left(Ae^{i\ t} + Be^{-i\ t}\right)$$

オイラーの公式　$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$　を適用すると，

$$x = e^{-3t}\{A(\cos t + i\sin t) + B(\cos(-t) + i\sin(-t))\} = e^{-3t}\{A(\cos t + i\sin t) + B(\cos t - i\sin t)\}$$
$$= e^{-3t}\{(A+B)\cos t + i(A-B)\sin t\}$$

なお，$\cos(-t) = \cos t$，$\sin(-t) = -\sin t$ を用いた．

ここで x が実数であるためには $A+B$　および　$i(A-B)$ はともに実数でなければならない．c_1 と c_2 を実数として $c_1 = A+B$，　$c_2 = i(A-B)$ とおくと，一般解は

$$x = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

となる．(　)内を１つの三角関数に合成するために，$c_1 = a\sin\varphi$，$c_2 = a\cos\varphi$，$a = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}$ とすれば，一般解は次のように書くことができる．

$$x = e^{-3t}(a\sin\varphi\cos t + a\cos\varphi\sin t)$$
$$= ae^{-3t}(\sin\varphi\cos t + \cos\varphi\sin t) = ae^{-3t}\sin(t+\varphi)$$

（a と φ は任意の実数）

（３）$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$　　上記の（１）と（２）と同様に解く．以下に略解を示す．

特性方程式は，$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$　　$\lambda = -1 \pm i$

$$x_1 = e^{(-1+i)t},\quad x_2 = e^{(-1-i)t}$$

c_1 と c_2 を任意の実数として，一般解は次のように書くことができる．

$$x = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

三角関数の加法定理を用いて整理すると

$$x = ae^{-t}\sin(t+\varphi)$$

（a と φ は任意の実数）

【1-5】

（１）$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$

$x = e^{\lambda t}$　（$e^{\lambda t} \neq 0$）とおき，合成関数の微分法を用いて t で微分すると $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$，$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ である．これらを元の微分方程式に代入すると，$\lambda^2 e^{\lambda t} + 3\lambda e^{\lambda t} + 2e^{\lambda t} = 0$ である．したがって，特性方程式は，$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ となる．

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{-3\pm 1}{2} = -1,\quad -2$$

$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$ とすれば，２つの特解は $x_1 = e^{-t}$，$x_2 = e^{-2t}$ となる．c_1 と c_2 を任意の実数として解の和も解であることを用いると，与式の一般解は次のように書くことができる．

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

（２）$\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$

$x = e^{\lambda t}$　（$e^{\lambda t} \neq 0$）とおき，合成関数の微分法を用いて t で微分すると $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$，$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ である．これらを元の微分方程式に代入すると，$\lambda^2 e^{\lambda t} + 5\lambda e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0$　である．したがっ

て，特性方程式は，$\lambda^2+5\lambda+4=0$　となる．　$\lambda=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\dfrac{-5\pm3}{2}=-1,\quad -4$

$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-4$ とすれば，２つの特解は $x_1=e^{-t}$，$x_2=e^{-4t}$ となる．c_1 と c_2 を任意の実数として解の和も解であることを用いると，与式の一般解は次のように書くことができる．

$$x=c_1x_1+c_2x_2=c_1e^{-t}+c_2e^{-4t}$$

（３）$\ddot{x}+4\dot{x}+x=0$　　上記の（１）と（２）と同様に解くと次のようになる．

特性方程式は，$\lambda^2+4\lambda+1=0$　　$\lambda=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=-2\pm\sqrt{3}$　となるから，２つの特解は，

$$x_1=e^{\left(-2+\sqrt{3}\right)t},\quad x_2=e^{\left(-2-\sqrt{3}\right)t}$$

となる．したがって，c_1 と c_2 を任意の実数として，一般解は次のように書くことができる．

$$x=c_1x_1+c_2x_2=c_1e^{\left(-2+\sqrt{3}\right)t}+c_2e^{\left(-2-\sqrt{3}\right)t}$$

【1-6】

（１）$\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$

$x=e^{\lambda t}$　（$e^{\lambda t}\neq0$）とおき，合成関数の微分法を用いて t で微分すると　$\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$，$\ddot{x}=\lambda^2e^{\lambda t}$ である．これらを元の微分方程式に代入すると，$\lambda^2e^{\lambda t}+2\lambda e^{\lambda t}+e^{\lambda t}=0$　である．したがって，特性方程式は，$\lambda^2+2\lambda+1=0$　となり，その解は，　$\lambda=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=-1$（重根）　である．

$\lambda_1=-1$ とすれば，特解は $x_1=e^{-t}$ である．一般解を求めるためにはもう１つ特解が必要であるから，$x_2=te^{-t}$ と仮定してこれが特解であるかどうかを調べることにする．$\dot{x}_2=e^{-t}-te^{-t}$，$\ddot{x}_2=-e^{-t}-e^{-t}+te^{-t}=-2e^{-t}+te^{-t}$ を元の微分方程式の左辺に代入すると，$\left(-2e^{-t}+te^{-t}\right)+2\left(e^{-t}-te^{-t}\right)+te^{-t}=0$ であるから，x_2 も確かに元の微分方程式の特解である．c_1 と c_2 を任意の実数として解の和も解であることを用いると，与式の一般解は次のように書くことができる．

$$x=c_1x_1+c_2x_2=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}=e^{-t}\left(c_1+c_2t\right)$$

（２）$\ddot{x}+6\dot{x}+9x=0$

$x=e^{\lambda t}$　（$e^{\lambda t}\neq0$）とおき，合成関数の微分法を用いて t で微分すると　$\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$，$\ddot{x}=\lambda^2e^{\lambda t}$ である．これらを元の微分方程式に代入すると，$\lambda^2e^{\lambda t}+6\lambda e^{\lambda t}+9e^{\lambda t}=0$　である．したがって，特性方程式は，$\lambda^2+6\lambda+9=0$　となり，その解は，　$\lambda=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=-3$　（重根）　である．

$\lambda_1=-3$ とすれば，特解は $x_1=e^{-3t}$ である．一般解を求めるためにはもう１つ特解が必要であるから $x_2=te^{-3t}$ と仮定して，これが特解であるかどうかを調べることにする．$\dot{x}_2=e^{-3t}-3te^{-3t}$，$\ddot{x}_2=-3e^{-3t}-3e^{-3t}+9te^{-3t}=-6e^{-3t}+9te^{-3t}$ を元の微分方程式の左辺に代入すると，$\left(-6e^{-3t}+9te^{-3t}\right)+6\left(e^{-3t}-3te^{-3t}\right)+9te^{-3t}=0$ であるから，x_2 も確かに元の微分方程式の特解である．c_1 と c_2 を任意の実数として解の和も解であることを用いると，与式の一般解は次のように書くことができる．

$$x=c_1x_1+c_2x_2=c_1e^{-3t}+c_2te^{-3t}=e^{-3t}\left(c_1+c_2t\right)$$

【1-7】

（1） $\ddot{x}+4x=\sin t$ ・・・①

式①の右辺を 0 とした同次方程式は $\ddot{x}+4x=0$ である．これは，単振動を表す微分方程式なので，その一般解は a と φ を定数として $x_1=a\sin(2t+\varphi)$ となる．

式①の特解を $x_2=A\sin t$ とおいて，以下に A を求める方法を記す．

合成関数の微分法を用いて x_2 を t で微分すると，$\dot{x}_2=A\cos t$，$\ddot{x}_2=-A\sin t$ を得る．これらを式①に代入して A を次のように求める．

$$-A\sin t+4A\sin t=\sin t$$

$$(-A+4A-1)\cdot\sin t=0$$

$\sin t\neq 0$（常に 0 ではないということ）なので，$-A+4A-1=0$ であるから $A=\dfrac{1}{3}$ となる．

よって，特解は $x_2=\dfrac{1}{3}\sin t$ となる．以上から，式①の一般解は次のようになる．

$$x=x_1+x_2=a\sin(2t+\varphi)+\frac{1}{3}\sin t$$

（2） $\ddot{x}+3x=2\cos 2t$ ・・・①

式①の右辺を 0 とした同次方程式 $\ddot{x}+3x=0$ である．これは，単振動を表す微分方程式なので，その一般解は，a と φ を定数として $x_1=a\sin(\sqrt{3}t+\varphi)$ となる．
式①の特解を $x_2=A\cos 2t$ とおいて，以下に A を求める．

合成関数の微分法を用いて x_2 を t で微分すると，$\dot{x}_2=-2A\sin 2t$，$\ddot{x}_2=-4A\cos 2t$ を得る．これらを式①に代入して次のように A を求める．

$$-4A\cos 2t+3A\cos 2t=2\cos 2t$$

$$(-4A+3A-2)\cdot\cos 2t=0$$

$\cos 2t\neq 0$ （常に 0 ではないということ）なので，$(-4A+3A-2)=0$ であるから $A=-2$ となる． よって，特解は $x_2=-2\cos 2t$ となる．

以上から，式①の一般解は次のようになる．

$$x=x_1+x_2=a\sin(\sqrt{3}t+\varphi)-2\cos 2t$$

【1-8】

（1） $\begin{cases} a\sin\theta=1 \\ a\cos\theta=\sqrt{3} \end{cases}$ より $\begin{cases} \sin\theta=\dfrac{1}{a} \\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{a} \end{cases}$ となる．両式を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると，

$\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{a}\right)^2=1$ となるから，$a^2=4$ である．ここで，$a>0$ なので $a=2$ となる．

$a=2$ を元の式に代入すると，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるから，これを解くと $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ となる．

（2） $\begin{cases} a\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ a\cos\theta = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ より $\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2a} \\ \cos\theta = \dfrac{-3}{2a} \end{cases}$ となる．両式を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると，

$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{-3}{2a}\right)^2 = 1$ となるから，$a^2 = 9$ である．ここで，$a > 0$ なので $a = 3$ となる．

$a = 3$ を元の式に代入すると，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ となるから，これを解くと

$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ となる．

【1-9】

$x = ae^{-2t}\sin(t+\varphi)$ に $t = 0$ と $x = 0$ を代入すると $0 = a\sin\varphi$ ･･･①

$x = ae^{-2t}\sin(t+\varphi)$ を積の微分法および合成関数の微分法を用いて t で微分すると $\dot{x} = -2ae^{-2t}\sin(t+\varphi) + ae^{-2t}\cos(t+\varphi)$ となる．これに $t = 0$ と $\dot{x} = 1$ を代入すると，$1 = -2a\sin\varphi + a\cos\varphi$ ･･･② を得る．

式①より $\sin\varphi = 0$ ･･･③ となるから，これを式②に代入すると $1 = 0 + a\cos\varphi$ となり，$\cos\varphi = \dfrac{1}{a}$ ･･･④ を得る．式③と式④を $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ に代入すると $0^2 + \left(\dfrac{1}{a}\right)^2 = 1$ となる．これより $a^2 = 1$ となり，$a > 0$ であることから $a = 1$ である．その結果，$\sin\varphi = 0$，$\cos\varphi = 1$ であるから $\varphi = 0$ となる．よって，初期条件を考慮した x は $x = e^{-2t}\sin t$ である．

第2章 章末問題解答

【2-1】（1） $f = 10$ Hz （2） $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{10} = 0.1$ s

【2-2】

（1）与式より $\omega_0 = 2\pi$ rad/s． 1 秒間に 2π ラジアンの割合で位相が増加する． （2）

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$ s

（3） $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{1} = 1$ Hz （4）与式より，$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ rad． （5）与式より，$a = 2$ m．

（6）点 P は，半径 2 m の円周上を，初期位相 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ rad に対応する点 P_0 を始点として反時計回りに角速度 $\omega_0 = 2\pi$ rad/s で回転する．このとき，図 A-1 のように t に対して PP' を投影してできる曲線が $x = 2\sin\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ [m] である．グラフおよび三角関数の公式

$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$ より，与式は　$x=2\cos(2\pi t)$ [m] に等しいことがわかる．

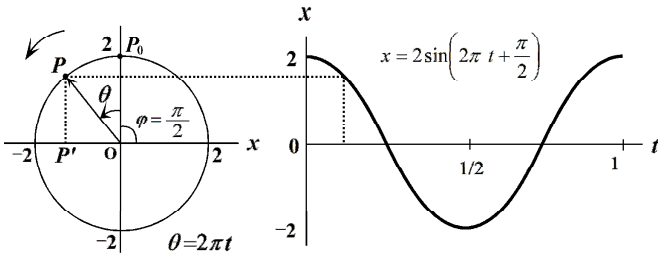

図 A-1

【2-3】

（1） $x_1=\cos\sqrt{3}t$ を式①に代入して，イコールが成り立つかどうかを調べる．

$$左辺=2\frac{d^2x_1}{dt^2}=2\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)=2\frac{d}{dt}\left(\frac{d\left(\cos\sqrt{3}t\right)}{dt}\right)=2\frac{d}{dt}\left(-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\right)=-2\sqrt{3}\frac{d}{dt}\left(\sin\sqrt{3}t\right)$$
$$=-2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\right)=-6\cos\sqrt{3}t$$

$$右辺=-6x_1=-6\cos\sqrt{3}t$$

左辺＝右辺　が成立するので，$x_1=\cos\sqrt{3}t$ は式①の解である．

$x_2=\sin\sqrt{3}t$ についても同様に式①に代入する．

$$左辺=2\frac{d^2x_2}{dt^2}=2\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)=2\frac{d}{dt}\left(\frac{d\left(\sin\sqrt{3}t\right)}{dt}\right)=2\frac{d}{dt}\left(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\right)=-2\sqrt{3}\frac{d}{dt}\left(\cos\sqrt{3}t\right)$$
$$=2\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\right)=-6\sin\sqrt{3}t$$

$$右辺=-6x_2=-6\sin\sqrt{3}t$$

左辺＝右辺　が成立するので，　$x_2=\sin\sqrt{3}t$ も式①の解である．

（2） $x_3=2\cos\left(\sqrt{3}t+\pi\right)$ についても式①に代入する．

$$左辺=2\frac{d^2x_3}{dt^2}=2\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_3}{dt}\right)=2\frac{d}{dt}\left(\frac{d\left(2\cos(\sqrt{3}t+\pi)\right)}{dt}\right)=2\frac{d}{dt}\left(-2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t+\pi)\right)$$
$$=-4\sqrt{3}\frac{d}{dt}\left(\sin(\sqrt{3}t+\pi)\right)=-4\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t+\pi)\right)=-12\cos(\sqrt{3}t+\pi)$$

$$右辺=-6x_3=-6\left(2\cos(\sqrt{3}t+\pi)\right)=-12\cos(\sqrt{3}t+\pi)$$

左辺＝右辺　が成立するので，$x_3=2\cos(\sqrt{3}t+\pi)$ も式①の解である．

【2-4】

（1）与式　$x=4\cos(3\pi t+\pi)$ より角振動数は $\omega_0=3\pi$ rad/s である．これを用いて振動の周期は

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{3\pi} = \dfrac{2}{3}$ s である．したがって，周波数は $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{3}{2}$ Hz となる．

（２）与式より a=4 m ，　$\varphi = \pi$ rad .

（３）$x_{t=0.25} = 4\cos(3\pi \times 0.25 + \pi) = 4\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi + \pi\right) = 4\cos\left(\dfrac{7}{4}\pi\right) = 4 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ m

（４）$v = \dot{x} = \dfrac{d}{dt}\{4\cos(3\pi t + \pi)\} = 4 \cdot \{-3\pi \sin(3\pi t + \pi)\} = -12\pi \sin(3\pi t + \pi)$ $[\mathrm{m/s}]$

$\alpha = \dot{v} = \dfrac{d}{dt}\{-12\pi \sin(3\pi t + \pi)\} = -12\pi \cdot 3\pi \cos(3\pi t + \pi) = -36\pi^2 \cos(3\pi t + \pi)$ $[\mathrm{m/s^2}]$

（５）$|v| = |-12\pi \sin(3\pi t + \pi)|$ において $\sin(3\pi t + \pi) = \pm 1$ のとき $|v|$ は最大値 12π m/s となる．

$|\alpha| = |-36\pi^2 \cos(3\pi t + \pi)|$ において $\cos(3\pi t + \pi) = \pm 1$ のとき $|\alpha|$ は最大値 $36\pi^2$ m/s^2 となる．

【2-5】

$x = a\sin(\pi t + \varphi)$　　・・・①

初期条件 $t = 0$，$x = 0$　を代入すると　$0 = a\sin\varphi$，$a \neq 0$　であるから $\sin\varphi = 0$　となる．

合成関数の微分法を用いて式①を t で微分して　$\dot{x} = a\pi\cos(\pi t + \varphi)$　　・・・②　を得る．

初期条件 $t = 0$，$\dot{x} = 2$　を式②に代入すると　$2 = a\pi\cos\varphi$　となるから　$\cos\varphi = \dfrac{2}{a\pi}$　となる．

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$　より　$0^2 + \left(\dfrac{2}{a\pi}\right)^2 = 1$　となり，$a > 0$ であるから　$a = \dfrac{2}{\pi}$　となる．その結果 $\cos\varphi = 1$　である．以上から $\sin\varphi = 0$，$\cos\varphi = 1$　なので，$\varphi = 0$ となる．よって，式①は $x = \dfrac{2}{\pi}\sin(\pi t)$　となる．t を横軸にしてプロットすると図 A-2 のグラフを得る．

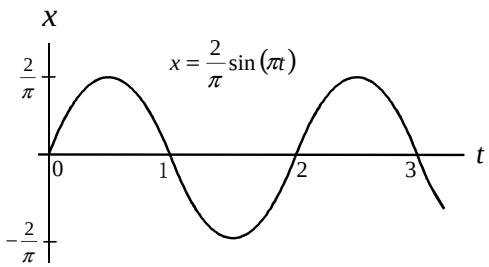

図 A-2

【2-6】

（１）$x = 2\sin\pi t$ より　$\omega_0 = \pi$ rad/s

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$　より　$k = m\omega_0{}^2 = \dfrac{1}{2\pi^2} \times \pi^2 = \dfrac{1}{2}$ N/m

（２）質量 m [kg]の質点が速度 v [m/s]で運動するときの運動エネルギーは $E_K = 1/2 \cdot m v^2$ [J]で与えられる．合成関数の微分法を用いて x を t で微分して質点の速度を求めると $v = \dot{x} = 2\pi\cos\pi t$ [m/s] であるから，質点の運動エネルギーは次のようになる．

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi^2}\cdot(2\pi\cos\pi t)^2 = \cos^2\pi t \text{ [J]}$$

（３） ばね定数 k [N/m]のばねが x [m]だけ伸び縮みしたときのポテンシャルエネルギーは $E_P = 1/2\cdot kx^2$ [J]で与えられる.

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\sin\pi t)^2 = \sin^2\pi t \text{ [J]}$$

（４） $E = E_K + E_P = \cos^2\pi t + \sin^2\pi t = 1$ J

【2-7】

（１） $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{0.25} = 8\pi$ rad/s

（２） $k = m\omega_0{}^2 = 0.2\times(8\pi)^2 = 12.8\pi^2$ N/m

（３）合成関数の微分法を用いて x を t で微分しておもりの速度を求めると $v = \dot{x} = a\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ となる.

全エネルギーE は運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和であるから, 全エネルギーは

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\{a\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi)\}^2 + \frac{1}{2}k\{a\sin(\omega_0 t+\varphi)\}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\{a\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi)\}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0{}^2\{a\sin(\omega_0 t+\varphi)\}^2$$

$k = m\omega_0{}^2$

$$= \frac{1}{2}ma^2\omega_0{}^2\{\cos^2(\omega_0 t+\varphi) + \sin^2(\omega_0 t+\varphi)\} = \frac{1}{2}ma^2\omega_0{}^2\cdot 1 = \frac{1}{2}ma^2\omega_0{}^2$$

となる．これより， $a = \dfrac{1}{\omega_0}\sqrt{\dfrac{2E}{m}}$ となる.

したがって， $a = \dfrac{1}{8\pi}\sqrt{\dfrac{2\times 10}{0.2}} = \dfrac{1}{8\pi}\sqrt{100} = \dfrac{5}{4\pi}$ m

【2-8】

$$\overline{V^2} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} V^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} V_0{}^2\sin^2\omega_0 t\ dt = \frac{V_0{}^2}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{1-\cos 2\omega_0 t}{2}dt$$

$$= \frac{V_0{}^2}{2T_0}\left[t - \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0}\right]_0^{T_0} = \frac{V_0{}^2}{2T_0}\left[\left\{T_0 - \frac{\sin 2\omega_0 T_0}{2\omega_0}\right\} - \left(0 - \frac{\sin 0}{2\omega_0}\right)\right]$$

$\omega_0 T_0 = 2\pi$

$$= \frac{V_0{}^2}{2T_0}\cdot T_0 = \frac{V_0{}^2}{2}$$

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\frac{V_0{}^2}{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ V}$$

第3章 章末問題解答

【3-1】

減衰振動の一般解　$x = ae^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2}\ t+\varphi\right)$　・・・①　において，グラフより時刻 t_1 と時刻 t_2 において x=0 であるから，２つの時刻での sin の中身 $\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2}\ t+\varphi$ は 2π だけ異なる．したがって，

$$\left(\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2}\ t_2+\varphi\right)-\left(\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2}\ t_1+\varphi\right)=2\pi$$

となる．これを解くと $\Delta t = t_2 - t_1 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2}}$ となる．これは単振動の周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ に比べて大きな値である．

【3-2】

（１）ばねの長さは，ばねの下端（おもりの位置）とばねの上端の間の長さであるから $L' = x - A\cos\omega t$ と表される．　ばねの伸びまたは縮み ΔL は，ばねの長さ L' と自然長 L の差であるから，$\Delta L = L' - L = x - A\cos\omega t - L$ [m]　となる．

（２）フックの法則より，おもりに作用するばねの力は $f = -k\cdot\Delta L = -k\left(x - A\cos\omega t - L\right)$ [N] となる．f の値が正のとき力の向きは $+x$ 方向となり，負のときは $-x$ 方向となるので，この式は，ばねが縮んだときと伸びたときの両方の場合を表している．

（３）図 A-3 に，ばねが伸びたときと縮んだときの様子を例として示す．おもりには，重力 mg とばねからの力 f が作用する．

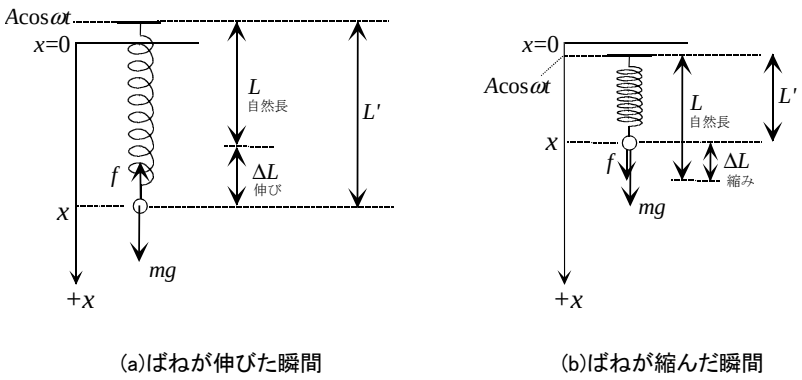

図 A-3

（４）おもりには重力 mg と（２）で求めたばねからの力 f が作用するから，おもりの運動方程式は，$m\ddot{x} = mg - k\left(x - A\cos\omega t - L\right)$　となる．

（５）$m\ddot{x} = mg - kx + kA\cos\omega t + kL$　　・・・①

$x = y + L + \dfrac{mg}{k}$　・・・②　の両辺を t で微分することによって　$\ddot{x} = \ddot{y}$　・・・③ である．

式①に②と③を代入すると次式を得る．

$$m\ddot{y} = mg - k\left(y + L + \frac{mg}{k}\right) + kA\cos\omega t + kL$$

これを整理すると次のように y に関する微分方程式を得る．

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}y + \frac{k}{m}A\cos\omega t$$

$\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$ を用いると次式を得る．

$$\ddot{y} + \omega_0{}^2 y = \omega_0{}^2 A\cos\omega t \quad \cdots④$$

（6）式④の右辺を 0 とした同次方程式は $\ddot{y} + \omega_0{}^2 y = 0$ である．これは単振動を表す微分方程式なので，その一般解は，a と φ を定数として $y_1 = a\sin(\omega_0 t + \varphi)$ となる．

（7）式④の特解を $y_2 = B\cos\omega t$ とおいて，以下に B を求める方法を記す．

合成関数の微分法を用いて y_2 を t で微分すると，$\dot{y}_2 = -B\omega\sin\omega t$，$\ddot{y}_2 = -B\omega^2\cos\omega t$ を得る．これらを式④に代入して次のように B を求める．

$$-B\omega^2\cos\omega t + \omega_0{}^2 B\cos\omega t = \omega_0{}^2 A\cos\omega t$$

$$\left(-B\omega^2 + \omega_0{}^2 B - \omega_0{}^2 A\right)\cdot\cos\omega t = 0$$

$\cos\omega t \neq 0$ なので，$-B\omega^2 + \omega_0{}^2 B - \omega_0{}^2 A = 0$ となる．したがって，$B = \dfrac{\omega_0{}^2 A}{\omega_0{}^2 - \omega^2}$ となる．

$$\therefore \quad y_2 = \frac{\omega_0{}^2 A}{\omega_0{}^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

（8）式④の一般解は次のようになる．

$$y = y_1 + y_2 = a\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\omega_0{}^2 A}{\omega_0{}^2 - \omega^2}\cos\omega t \qquad \cdots⑤$$

（9）式⑤において，$\omega \to \omega_0$ とすると第 2 項が±∞となるので，y も±∞となる．この状態は共鳴状態である．$\omega \approx \omega_0$ の条件で，おもりが静止している状態でばねの上端を揺すり始めると，ばねの上端を揺する振幅 A が小さくても時間の経過とともに，おもりの振幅は大きくなっていく．なお，実際には，ばねの長さは有限であるから振幅が無限になることはない．

第4章 章末問題解答

【4-1】

（1）

$$\ddot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \qquad \cdots①$$

$$\ddot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \qquad \cdots②$$

①+②より　$\ddot{x}_1+\ddot{x}_2=-x_1-x_2$　　$\therefore\ \ddot{x}_1+\ddot{x}_2=-(x_1+x_2)$　・・・③

$X_1=x_1+x_2$　・・・④　とおくと式③は，$\ddot{X}_1=-X_1$　　$\therefore\ \ddot{X}_1+1X_1=0$　・・・⑤

単振動を表す微分方程式 $x+\omega_0{}^2x=0$ の一般解は，$x=a\sin(\omega_0 t+\varphi)$　・・・⑥　なので，これを用いると式⑤の一般解は次のようになる．

$X_1=a_1\sin(1t+\varphi_1)$　　（a_1 と φ_1 は未定定数）　　・・・⑦

①−②より　$\ddot{x}_1-\ddot{x}_2=-3x_1+3x_2$　　$\therefore\ \ddot{x}_1-\ddot{x}_2=-3(x_1-x_2)$　　・・・⑧

$X_2=x_1-x_2$　・・・⑨　　とおくと式⑦は，$\ddot{X}_2=-3X_2$　　$\therefore\ \ddot{X}_2+3X_2=0$　・・・⑩

式⑩の一般解は式⑥を用いて次のようになる．

$X_2=a_2\sin(\sqrt{3}t+\varphi_2)$　（a_2 と φ_2 は未定定数）・・・⑪

式④と⑨より　$x_1=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，$x_2=\frac{1}{2}(X_1-X_2)$ なので，両式に式⑦と式⑪を代入して

$$x_1=\frac{1}{2}\left\{a_1\sin(t+\varphi_1)+a_2\sin(\sqrt{3}t+\varphi_2)\right\}$$

$$x_2=\frac{1}{2}\left\{a_1\sin(t+\varphi_1)-a_2\sin(\sqrt{3}t+\varphi_2)\right\}$$

となる．ここで，$A_1=\frac{1}{2}a_1$，$A_2=\frac{1}{2}a_2$　と書き直すと，与式の一般解は，A_1，A_2，φ_1，φ_2 を定数として次のようになる．

$$x_1=A_1\sin(t+\varphi_1)+A_2\sin(\sqrt{3}t+\varphi_2)$$
$$x_2=A_1\sin(t+\varphi_1)-A_2\sin(\sqrt{3}t+\varphi_2)$$

（２）　（１）と同様にして次の一般解を得る．

$$x_1=A_1\sin(\sqrt{2}t+\varphi_1)+A_2\sin(2\sqrt{2}t+\varphi_2)$$
$$x_2=A_1\sin(\sqrt{2}t+\varphi_1)-A_2\sin(2\sqrt{2}t+\varphi_2)$$

【4-2】

質点に作用する力は，「（力の向きを表す符号）（ばね定数）（伸びまたは縮み）」　の順に表す．力の向きは符号によって表し，（伸びまたは縮み）は絶対値をとって正の値として表す．図の右方向を+u 方向として，以下に解法を示す．

（１）

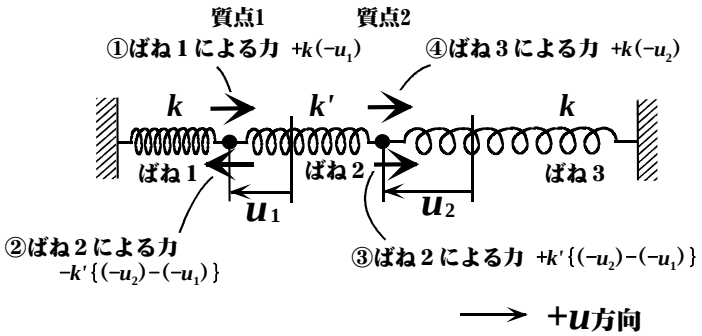

図 A-4

①図 A-4 の瞬間において，ばね１は縮んでいる．縮んでいるばねは，伸びようとする．質点１がばね１から受ける力の向きは右向き（+u 方向）なので，力の向きを表す符号は＋とする．変位 u_1 は負であるから，$|u_1| = -u_1$ がばね１の縮みである．以上をまとめると，ばね１から質点１に作用する力は図中に記したように $+k(-u_1)$ となる．

②図の瞬間において，$|u_1| < |u_2|$ なのでばね２は縮んでいる．ばね２から質点１には左向き（−u 方向）の力が作用するので，力の向きを表す符号は－とする．変位 u_1 と u_2 はともに負であることを考慮して，$|u_2| - |u_1| = (-u_2) - (-u_1)$ がばね２の縮みである．力の向きを表す符号と併せて $-k'\{(-u_2) - (-u_1)\}$ が，ばね２から質点１に作用する力である．

③ばね２から質点２が受ける力は②の力と逆向きなので，符号を変えて $+k'\{(-u_2) - (-u_1)\}$ である．

④図より，ばね３は伸びている．質点２がばね３から受ける力は右向き（+ u 方向）であるから符号は＋とする．変位 u_2 は負なので，$|u_2| = -u_2$ がばね３の伸びである．よって，ばね３から質点２に作用する力は，$+k(-u_2)$ である．

以上から運動方程式は次のように表される．

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = +k(-u_1) - k'\{(-u_2) - (-u_1)\} \\ m\ddot{u}_2 = +k'\{(-u_2) - (-u_1)\} + k(-u_2) \end{cases}$$

これを整理すると，次のようになる．

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = -ku_1 - k'(u_1 - u_2) \\ m\ddot{u}_2 = +k'(u_1 - u_2) - ku_2 \end{cases}$$

（２）

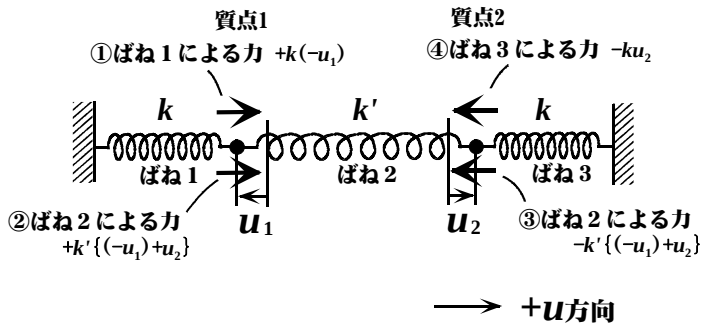

図 A-5

①図 A-5 において，ばね１は縮んでいる．ばね１から質点１に作用する力は右方向（+u 方向）なので力の方向を表す符号は＋とする．u_1 は負であるから，$|u_1| = -u_1$ がばね１の縮みである．以上から，ばね１から質点１に作用する力は $+k(-u_1)$ である．

②図において，ばね２は伸びている．伸びているばねは縮もうとする．ばね２から質点１に作用する力の向きは右向き（+u 方向）なので，力の方向を表す符号は＋とする．u_1 は負で，u_2 は正なので，$|u_1| + |u_2| = -u_1 + u_2$ が，ばね２の伸びである．以上から，ばね２から質点１に作用する力は $+k'(-u_1 + u_2)$ である．

③質点２がばね２から受ける力は②の力の逆向きなので$-k'(-u_1+u_2)$である．

④図において，ばね３は縮んでいる．質点２がばね３から受ける力は左方向（$-u$ 方向）なので，力の向きを表す符号は－とする．u_2は正なので$|u_2|=u_2$が，ばね３の縮みである．したがって，質点２がばね３から受ける力は$-ku_2$である．

以上から運動方程式は，次のように表される．

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = +k(-u_1)+k'(-u_1+u_2) \\ m\ddot{u}_2 = -k'(-u_1+u_2)-ku_2 \end{cases}$$

これを整理すると次のようになり，（１）と同じ結果になる．

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = -ku_1-k'(u_1-u_2) \\ m\ddot{u}_2 = +k'(u_1-u_2)-ku_2 \end{cases}$$

【4-3】

（１）二重振り子には，次の２通りの振動モードがある．

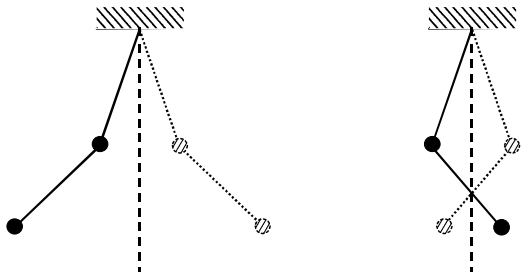

図 A-6

（２）三重振り子には，次のように３通りの振動モードがある．

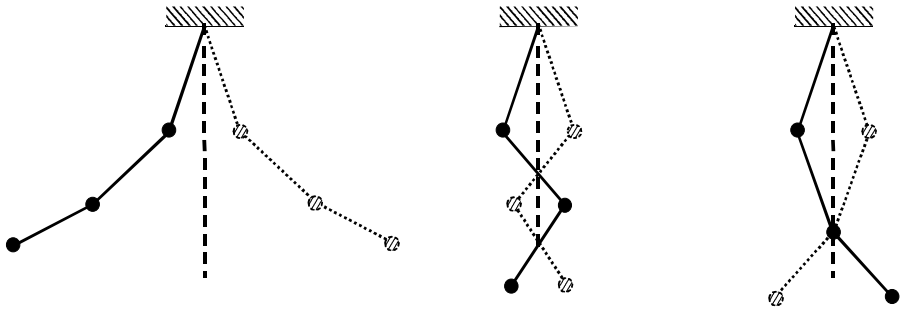

図 A-7

【4-4】

$$\begin{cases} u_n = A\sin\left(\dfrac{n\cdot j}{N+1}\pi\right)\cdot\cos\omega_j t & \cdots ① \\ \omega_j = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{j}{N+1}\pi\right)\right| & \cdots ② \end{cases}$$

（$n=1,2,3\cdots N$　　，　$j=1,2,3\cdots N$）

n：質点の番号，　N：質点の数，　j：モードの番号

（１）N=1 の場合は質点の番号は n=1 およびモードの番号は j=1 だけである．式①および式②に N=1，j=1，n=1 を代入すると次のようになる．

$$u_1 = A\sin\left(\frac{1\times 1}{1+1}\pi\right)\cdot\cos\omega_1 t = A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\omega_1 t = A\cos\omega_1 t$$

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+1}\pi\right)\right| = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

したがって，質点の変位と角振動数は次のように求められる．

$$u_1 = A\cos\omega_1 t = A\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

この様子を図示すると図 A-8 のようになる．

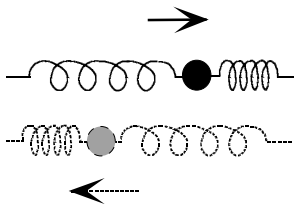

図 A-8

（２）N=2 の場合には，質点の番号は n=1,2 および モードの番号は j=1,2 となる．

j=1 のとき，式①および式②に N=2，j=1 を代入すると次のようになる．

$$u_n = A\sin\left(\frac{n\times 1}{2+1}\pi\right)\cdot\cos\omega_1 t = A\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\cdot\cos\omega_1 t \qquad \cdot\cdot\cdot③$$

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2+1}\pi\right)\right| = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\times\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \cdot\cdot\cdot④$$

したがって，j=1 のとき，２つの質点の変位 u_1，u_2 は式③で n=1，n=2 とし，式④を代入して次のようになる．

$$u_1 = A\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t = \frac{\sqrt{3}A}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$u_2 = A\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t = \frac{\sqrt{3}A}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

この様子を図示すると図 A-9 のように，２つの質点は同じ方向に図中に示した振幅比で振動する．

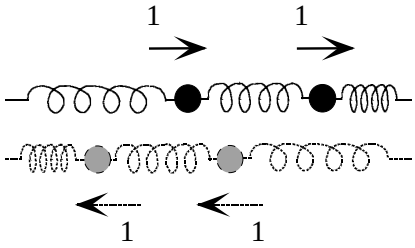

図 A-9

j=2 のとき，式①および式②に N=2，j=2 を代入すると次のようになる．

$$u_n = A\sin\left(\frac{n\times 2}{2+1}\pi\right)\cdot\cos\omega_2 t = A\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\cdot\cos\omega_2 t \qquad \cdot\cdot\cdot ⑤$$

$$\omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{2}\frac{2}{2+1}\pi\right)\right| = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right| = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad \cdot\cdot\cdot ⑥$$

したがって，j=2 のとき，２つの質点の変位 u_1，u_2 は式⑤で n=1，n=2 とし，式⑥を代入して次のようになる．

$$u_1 = A\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t = \frac{\sqrt{3}A}{2}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$
$$u_2 = A\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t = -\frac{\sqrt{3}A}{2}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$

この様子を図示すると図 A-10 のように２つの質点は，互いに逆向きに図中に示した振幅比で振動する．j=1 の場合よりも角振動数が大きいので，周期が短い振動となる．

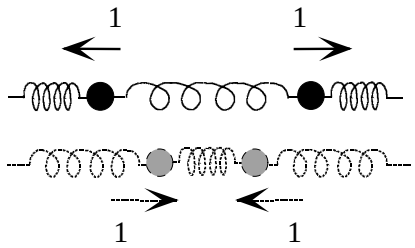

図 A-10

（３）N=3 の場合　質点の番号は n=1,2,3 およびモードの番号は j=1,2,3 となる．

j=1 のとき，式①および式②に N=3，j=1 を代入すると次のようになる．

$$u_n = A\sin\left(\frac{n\times 1}{3+1}\pi\right)\cdot\cos\omega_1 t = A\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\cdot\cos\omega_1 t \qquad \cdot\cdot\cdot ⑦$$

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{2}\frac{1}{3+1}\pi\right)\right| = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right) \qquad \cdot\cdot\cdot ⑧$$

ここで，三角関数の半角の公式$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$を用いると$\sin\frac{\pi}{8}$は次のようになる．

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$ である．$0<\sin\frac{\pi}{8}$であるから

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$ である．これを式⑧に代入してω_1は次のようになる．

$$\omega_1=2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sin\frac{\pi}{8}=2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{m}} \qquad ・・・⑨$$

したがって，j=1 のとき，３つの質点の変位 u_1，u_2，u_3 は式⑦で n=1，n=2，n=3 とし，式⑨を代入して次のようになる．

$$u_1=A\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\}=\frac{\sqrt{2}A}{2}\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\}$$

$$u_2=A\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)\cdot\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\}=A\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\}$$

$$u_3=A\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\}=\frac{\sqrt{2}A}{2}\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\}$$

この様子を図示すると図 A-11 のように３つの質点は, 同じ向きに図中に示した振幅比で振動する．

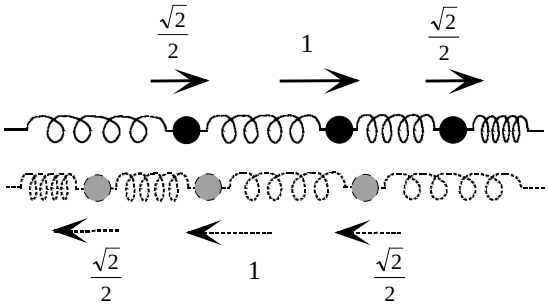

図 A-11

j=2 のとき，式①および式②に N=3，j=2 を代入すると次のようになる．

$$u_n=A\sin\left(\frac{n\times 2}{3+1}\pi\right)\cdot\cos\omega_2 t=A\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cdot\cos\omega_2 t \qquad ・・・⑩$$

$$\omega_2=2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3+1}\pi\right)\right|=2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=2\sqrt{\frac{k}{m}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{2k}{m}} \qquad ・・・⑪$$

したがって，j=2 のとき，３つの質点の変位 u_1，u_2，u_3 は式⑩で n=1，n=2，n=3 とし，式⑪を代入して次のようになる．

$$u_1 = A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t = A\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t$$

$$u_2 = A\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)\cdot\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t = A\sin\pi\cdot\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t = 0$$

$$u_3 = A\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t = -A\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t$$

この様子を図示すると図 A-12 のように，真ん中の質点は静止し，両側の２つの質点は互いに逆向きに図中に示した振幅比で振動する．

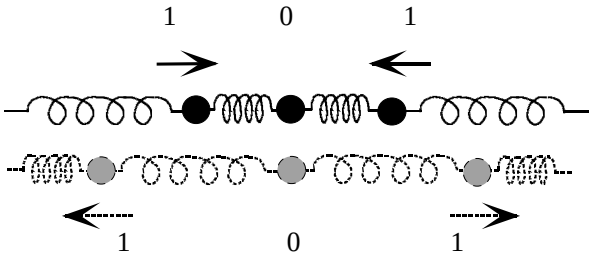

図 A-12

j=3 のとき，式①および式②に N=3，j=3 を代入すると次のようになる．

$$u_n = A\sin\left(\frac{n\times 3}{3+1}\pi\right)\cdot\cos\omega_3 t = A\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\cdot\cos\omega_3 t \qquad \cdots ⑫$$

$$\omega_3 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{2}\frac{3}{3+1}\pi\right)\right| = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \qquad \cdots ⑬$$

三角関数の半角の公式より，

$$\sin^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$ であり，$0<\sin\frac{3\pi}{8}$ であるから，

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$ である．これを式⑬に代入して ω_3 は次のようになる．

$$\omega_3 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{m}} \qquad \cdots ⑭$$

したがって，j=3 のとき，３つの質点の変位 u_1，u_2，u_3 は式⑫で n=1，n=2，n=3 とし，式⑬を代入して次のようになる．

$$u_1 = A\sin\left(\frac{3\times 1\times\pi}{4}\right)\cdot\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\} = \frac{\sqrt{2}A}{2}\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\}$$

$$u_2 = A\sin\left(\frac{3\times 2\times\pi}{4}\right)\cdot\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\} = -A\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\}$$

$$u_3 = A\sin\left(\frac{3\times3\times\pi}{4}\right)\cdot\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\} = \frac{\sqrt{2}A}{2}\cos\left\{\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)k}{m}}t\right\}$$

この様子を図示すると図 A-13 のように，両側の２つの質点は同じ向きに同じ振幅で振動するが，真ん中の質点はそれとは逆向きに振動する．振幅の比は図に示した通りである．

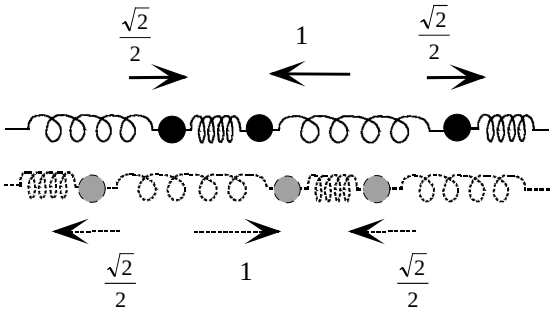

図 A-13

第5章 章末問題解答

【5-1】

（１） $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1 = 3+4+3 = 10$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$
$$= (2\cdot1-3\cdot2)\mathbf{i} + (3\cdot3-1\cdot1)\mathbf{j} + (1\cdot2-2\cdot3)\mathbf{k} = -4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-4\mathbf{k}$$

（２） $\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial(xyz)}{\partial x} + \frac{\partial(2xy^3z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(-x^3yz^2)}{\partial z} = yz + 6xy^2z^2 - 2x^3yz$

$$\Delta\mathbf{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}$$
$$= \left(\frac{\partial^2(xyz)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(xyz)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(xyz)}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2(2xy^3z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(2xy^3z^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(2xy^3z^2)}{\partial z^2}\right)\mathbf{j}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2(-x^3yz^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(-x^3yz^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(-x^3yz^2)}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}$$
$$= (0+0+0)\mathbf{i} + \left(0+2x\cdot6y\cdot z^2 + 2xy^3\cdot2\right)\mathbf{j} + \left(-6x\cdot yz^2 + 0 - x^3y\cdot2\right)\mathbf{k}$$

$$= \left(12xyz^2 + 4xy^3\right)\mathbf{j} - \left(6xyz^2 + 2x^3y\right)\mathbf{k}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$
$$=\left(\frac{\partial(-x^3yz^2)}{\partial y}-\frac{\partial(2xy^3z^2)}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial z}-\frac{\partial(-x^3yz^2)}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial(2xy^3z^2)}{\partial x}-\frac{\partial(xyz)}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$
$$=-\left(x^3z^2+4xy^3z\right)\mathbf{i}+\left(xy+3x^2yz^2\right)\mathbf{j}+\left(2y^3z^2-xz\right)\mathbf{k}$$

（3）

$$\Delta f(x,y,z)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x,y,z)=\frac{\partial^2(3x^2y^3z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(3x^2y^3z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(3x^2y^3z)}{\partial z^2}$$
$$=3\cdot 2\cdot y^3z+3x^2\cdot 6y\cdot z+0=6y^3z+18x^2yz$$

【5-2】分布定数回路を伝わる波の速さは $v=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ であるから，L と C の値を代入して，

$$v=\sqrt{\frac{1}{LC}}=\sqrt{\frac{1}{377\times10^{-9}\times67.0\times10^{-12}}}=\sqrt{\frac{1\times10^{20}}{37.7\times67.0}}=\sqrt{\frac{1}{37.7\times67.0}}\times10^{10}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2525.9}}\times10^{10}=1.99\times10^{8}\ \text{m/s}$$

【5-3】真空中の電磁波の位相速度は，$v=c=3.0\times10^{8}$ m/s である．振動数 f [Hz]，波長 λ [m]の波の位相速度は $v=f\cdot\lambda$ [m/s] であるから，電磁波の波長および周波数は，それぞれ $\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3.0\times10^{8}}{f}$ [m]，　$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3.0\times10^{8}}{\lambda}$ [Hz] である．

（1）① $\lambda=\frac{3.0\times10^{8}}{600\times10^{3}}=500$ m　② $\lambda=\frac{3.0\times10^{8}}{80\times10^{6}}=3.75$ m

③ $\lambda=\frac{3.0\times10^{8}}{1.9\times10^{9}}=0.158\ \text{m}=15.8\ \text{cm}$　④ $\lambda=\frac{3.0\times10^{8}}{12\times10^{9}}=0.025\ \text{m}=2.5\ \text{cm}$

（2）① $f=\frac{3.0\times10^{8}}{30}=1.0\times10^{6}\ \text{Hz}=10\ \text{MHz}$

② $f=\frac{3.0\times10^{8}}{2}=150\times10^{6}\ \text{Hz}=150\ \text{MHz}$

③ $f=\frac{3.0\times10^{8}}{0.3}=1\times10^{9}\ \text{Hz}=1\ \text{GHz}$

④ $f=\frac{3.0\times10^{8}}{0.6\times10^{-6}}=500\times10^{12}\ \text{Hz}=500\ \text{THz}$

【5-4】

（1）波動方程式は，波の位相速度を v として $\frac{\partial^2u}{\partial^2t}=v^2\frac{\partial^2u}{\partial^2x}$ である．与式より $v^2=9\times10^{16}$ であるから，$v=3\times10^{8}$ m/s となる．

（２） $f=\dfrac{v}{\lambda}=\dfrac{3\times10^{8}}{1}=300\times10^{6}\ \mathrm{Hz}=300\ \mathrm{MHz}$

（３）（１）（２）より波の速さが真空における電磁波の速さ $c=3\times10^{8}$ m/s に等しいので，題意の波は電磁波の中でも波長が 1 m，周波数が 300 MHz の電波であると推測される．

第6章 章末問題解答

【6-1】

（１）$u=a\sin(bx-ct)$ において，位置 x が波長λだけ変化すると波の位相は 2πだけ変化するから次の式が成り立つ．$\left|(bx-ct)-(b(x+\lambda)-ct)\right|=2\pi$　これを整理すると $b\lambda=2\pi$ となるから，波長は $\lambda=\dfrac{2\pi}{b}$ となる．

（２）（１）と同様に，時間 t が周期 T だけ変化すると波の位相は 2πだけ変化するから $\left|(bx-ct)-(bx-c(t+T)\right|=2\pi$ となる．これを整理すると，$cT=2\pi$ となるから周期は $T=\dfrac{2\pi}{c}$ となる．

（３）$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi\cdot\dfrac{c}{2\pi}=c$　　$f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{c}{2\pi}$

（４）$v=f\cdot\lambda=\dfrac{c}{2\pi}\cdot\dfrac{2\pi}{b}=\dfrac{c}{b}$

【6-2】

図に示すように点 A を下向きに変位させるためには，波は点線で示したように $-x$ 方向に進行しなければならない．それにともなって，点 B は上向きに，点 C は下向きに変位する．

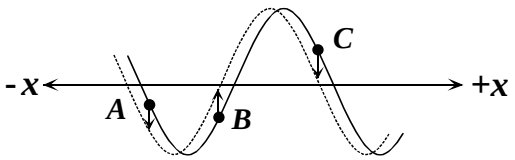

図 A-14

【6-3】

$u(x,t)=2\sin(3x-\pi t)$ を波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の左辺と右辺にそれぞれ代入する．

$$左辺=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial 2\sin(3x-\pi t)}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-2\pi\cos(3x-\pi t)\right)=-2\pi^2\sin(3x-\pi t)$$

$$右辺=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=v^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=v^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial 2\sin(3x-\pi t)}{\partial x}\right)=v^2\frac{\partial}{\partial x}\left(6\cos(3x-\pi t)\right)=-v^2\cdot18\sin(3x-\pi t)$$

両式を等置すると，

$$-2\pi^2\sin(3x-\pi t)=-18v^2\sin(3x-\pi t)$$

となり，これを整理すると次のようになる．

$$(18v^2-2\pi^2)\sin(3x-\pi t)=0$$

よって，$18v^2-2\pi^2=0$ となるから，$v^2=\dfrac{\pi^2}{9}$ のとき $u(x,t)=2\sin(3x-\pi t)$ は波動方程式の解になり得る．

【6-4】 $u(x,t)=A\sin kx\cdot\cos\omega t$ を波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の左辺と右辺にそれぞれ代入する．

$$左辺=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(A\sin kx\cdot\cos\omega t)}{\partial t}\right)=A\sin kx\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(\cos\omega t)}{\partial t}\right)$$

$$=-A\omega\sin kx\cdot\frac{\partial(\sin\omega t)}{\partial t}=-A\omega^2\sin kx\cdot\cos\omega t$$

$$右辺=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=v^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=v^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(A\sin kx\cdot\cos\omega t)}{\partial x}\right)=v^2A\cos\omega t\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\sin kx)}{\partial x}\right)$$

$$=v^2Ak\cos\omega t\cdot\frac{\partial(\cos kx)}{\partial x}=-v^2Ak^2\cos\omega t\cdot\sin kx$$

（左辺）＝（右辺）より $-A\omega^2\sin kx\cdot\cos\omega t=-v^2Ak^2\cos\omega t\cdot\sin kx$ である．

これを整理すると $A(v^2k^2-\omega^2)\cdot\sin kx\cdot\cos\omega t=0$ となるので，$\omega^2=k^2v^2$ である．よって，$\omega\geqq 0$ として $\omega=kv$ を得る．

第7章 章末問題解答

【7-1】

（1）本文中の式(5-17)より，弦を伝わる波の速さは，ひもの張力と線密度を用いて $v=\sqrt{\dfrac{T}{\sigma}}$ である．張力はおもりによる重力 mg に等しいからこれを代入して $v=\sqrt{\dfrac{mg}{\sigma}}$ となる．

（2）周波数 f は波の速さ v と波長 λ を用いて $f=\dfrac{v}{\lambda}$ と表される．

$L=\dfrac{1}{2}\lambda$ のとき $\lambda=2L$ だから，$f=\dfrac{v}{\lambda}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{mg}{\sigma}}}{2L}=\dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{mg}{\sigma}}$

$L=\lambda$ のとき，$f=\dfrac{v}{\lambda}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{mg}{\sigma}}}{L}=\dfrac{1}{L}\sqrt{\dfrac{mg}{\sigma}}$

$L=\dfrac{3}{2}\lambda$ のとき $\lambda=\dfrac{2}{3}L$ だから，$f=\dfrac{v}{\lambda}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{mg}{\sigma}}}{\dfrac{2}{3}L}=\dfrac{3}{2L}\sqrt{\dfrac{mg}{\sigma}}$

【7-2】正の方向に進む波を表す関数の例を以下に記す．

$$f(x,\ t)=f(x-vt)=a\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)+\varphi\right\}=a\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{2\pi v}{\lambda}t+\varphi\right)$$
$$=a\sin(kx-kvt+\varphi)=a\sin(kx-\omega t+\varphi)$$

$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ は波数，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ は角振動数であり，両者の間には $\omega=kv$ の関係があることを用いた．同様に負の方向に進む波は次のように表すことができる．

$$g(x,\ t)=g(x+vt)=a\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)+\varphi\right\}=a\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{2\pi v}{\lambda}t+\varphi\right\}$$
$$=a\sin(kx+kvt+\varphi)=a\sin(kx+\omega t+\varphi)$$

【7-3】

（1）本文中の式(5-17)より弦を伝わる波の位相速度は $v=\sqrt{\dfrac{T}{\sigma}}=\sqrt{\dfrac{200}{2\times10^{-2}}}=100$ m/s となる．

原点での振動が $u(x=0,t)=0.01\cos(1000\pi t)$ [m] と与えられているので，振幅は a=0.01 m，角振動数は $\omega=1000\pi$ rad/s である．したがって，$\omega=kv$ より $k=\dfrac{\omega}{v}=\dfrac{1000\pi}{100}=10\pi$ rad/m である．x 軸上で正の方向に進行する波動は $u(x,t)=a\cos(kx-\omega t)$ と表すことができるので，上記の値を代入して，$u(x,t)=0.01\cos(10\pi x-1000\pi t)$ と表すことができる．したがって，原点から 2 m 離れた点 P での振動は，$u(2,t)=0.01\cos(20\pi-1000\pi t)$ [m] と表される．

（2）合成関数の微分法を用いて $u(2,t)=0.01\cos(20\pi-1000\pi t)$ を t で微分すると，次のように点 P の u 方向への速度および加速度が得られる．

点 P の速度　$\dot{u}(2,t)=10\pi\sin(20\pi-1000\pi t)$ [m/s]

点 P の加速度　$\ddot{u}(2,t)=-10000\pi^2\cos(20\pi-1000\pi t)$ [m/s^2]

【7-4】

（1）図 A-15 に示すように，レーザー光源から出た平面波はスリットに向かって進行し，２つのスリットに入射する．ホイヘンスの原理により，それぞれのスリットが点波源となって素元波を発生し，素元波が重ね合わされて球面波（正確にはスリットは細長いので円筒波）となる．２つの球面波はダブルスリットの右側に広がっていく．

図のように球面波の波面が互いに重ね合わされて干渉する．波の山と山，谷と谷が重なりあうと

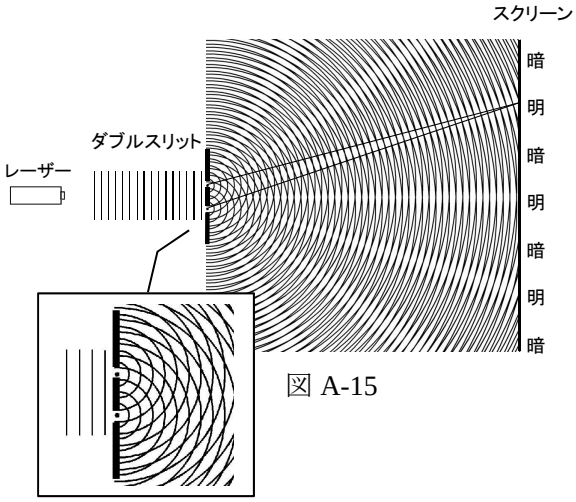

図 A-15

強めあい，山と谷が重なりあうと弱めあう．このパターンがスクリーン上では明点と暗点となって観察されることになる．レーザー光は干渉性が良い光で，明暗の縞模様が明瞭に観察できる．このように干渉性のよい光のことを**コヒーレントな光**という．

（2）図 A-16 において，点 C に輝点ができる条件は，スリット S_1 と S_2 からの光が強め合うことであるから，光路長差 $|S_1C - S_2C|$ が波長 λ の整数倍になることである．これは m を整数として，$|S_1C - S_2C| = m\lambda$ と表すことができる．一方，図より $|S_1C - S_2C| = S_2D$ である．角度 θ は小さいから $\sin\theta \approx \tan\theta = \dfrac{OC}{BO}$ であることを用いて次のように計算できる．

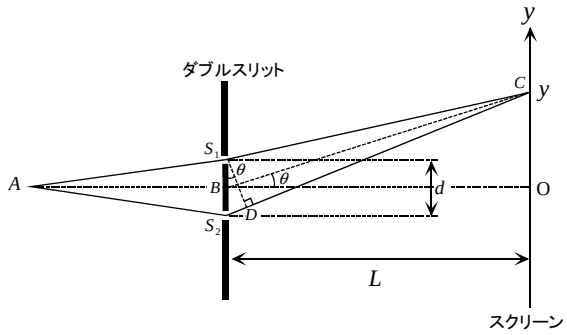

図 A-16

$$S_2D = S_1S_2 \times \sin\theta \approx S_1S_2 \times \tan\theta = d \times \frac{OC}{BO} = d \times \frac{y}{L}$$

よって，$d \times \dfrac{y}{L} = m\lambda$ であるから，スクリーン上の輝点の座標は $y = m\dfrac{L\lambda}{d}$（m は整数）となる．m は回折の次数とよばれ，m の値に対応した輝点が本文の図 7-18 の写真のように上下方向に現れる．

第8章 章末問題解答

【8-1】

（1）
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} 0\ dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} 1\ dt = \frac{1}{T}\left[t\right]_0^{T/2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos n\omega_0 t\ dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} 0\cdot\cos n\omega_0 t\ dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} 1\cdot\cos n\omega_0 t\ dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0}\right]_0^{T/2} = \frac{2}{n\omega_0 T}\sin\frac{n\omega_0 T}{2} = \frac{2}{n\cdot 2\pi}\sin\frac{n\cdot 2\pi}{2} = 0$$

$\omega_0 T = 2\pi$ を使った．

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin n\omega_0 t\ dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} 0\cdot\sin n\omega_0 t\ dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} 1\cdot\sin n\omega_0 t\ dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\sin n\omega_0 t\ dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{-\cos n\omega_0 t}{n\omega_0}\right]_0^{T/2} = -\frac{2}{n\omega_0 T}\left(\cos\frac{n\omega_0 T}{2} - \cos 0\right) = -\frac{2}{n\cdot 2\pi}\left(\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right) = -\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi},\quad b_2 = 0,\quad b_3 = \frac{2}{3\pi},\quad b_4 = 0,\quad b_5 = \frac{2}{5\pi},\quad b_6 = 0$$

$$b_7 = \frac{2}{7\pi},\quad b_8 = 0,\quad b_9 = \frac{2}{9\pi}\quad \cdots\ b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\ \cdots$$

以上の結果を $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t\right)$ に代入すると，目的とするフーリエ級数展開は次のようになる．

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\omega_0 t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\omega_0 t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\omega_0 t+\frac{2}{7\pi}\sin 7\omega_0 t+\frac{2}{9\pi}\sin 9\omega_0 t\cdots+\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin n\omega_0 t+\cdots$$

（2） $f(t)=\frac{1}{T}t+1 \quad (-T\leqq t<0)$ ， $f(t)=\frac{1}{T}t \quad (0<t\leqq T)$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\ dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)\ dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}t\ dt=\frac{1}{T}\left[\frac{1}{T}\frac{t^2}{2}+t\right]_{-T/2}^{0}+\frac{1}{T}\left[\frac{1}{T}\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{T/2}$$

$$=\frac{1}{T}\left\{\left(\frac{1}{T}\frac{0^2}{2}+0\right)-\left(\frac{1}{T}\frac{1}{2}\frac{T^2}{2^2}-\frac{T}{2}\right)\right\}+\frac{1}{T}\left(\frac{1}{T}\frac{1}{2}\frac{T^2}{2^2}-\frac{1}{T}\frac{0^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{T}\left\{0-\left(\frac{T}{8}-\frac{T}{2}\right)\right\}+\frac{1}{T}\left(\frac{T}{8}-0\right)=\frac{1}{2}$$

a_n と b_n の計算には, 部分積分 $\int_a^b f(t)\cdot g'(t)\ dt=\left[f(t)\cdot g(t)\right]_a^b-\int_a^b f'(t)\cdot g(t)\ dt$ を使う. また, 計算の途中では $\omega_0 T=2\pi$ およびこれを変形した $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ を代入する.

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cdot\cos n\omega_0 t\ dt=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)\cdot\cos n\omega_0 t\ dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}t\cdot\cos n\omega_0 t\ dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)\cdot\frac{\left(\sin n\omega_0 t\right)'}{n\omega_0}\ dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}t\cdot\frac{\left(\sin n\omega_0 t\right)'}{n\omega_0}\ dt$$

$$=\frac{2}{n\omega_0 T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)\cdot\left(\sin n\omega_0 t\right)'\ dt+\frac{2}{n\omega_0 T}\int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}t\cdot\left(\sin n\omega_0 t\right)'\ dt$$

$$=\frac{2}{n\cdot 2\pi}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)\cdot\left(\sin n\frac{2\pi}{T}t\right)'\ dt+\frac{2}{n\cdot 2\pi}\int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}t\cdot\left(\sin n\frac{2\pi}{T}t\right)'\ dt$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left\{\left[\left(\frac{1}{T}t+1\right)\cdot\sin n\frac{2\pi}{T}t\right]_{-T/2}^{0}-\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)'\cdot\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$+\frac{1}{n\pi}\left\{\left[\frac{1}{T}t\cdot\sin n\frac{2\pi}{T}t\right]_{0}^{T/2}-\int_{0}^{T/2}\left(\frac{1}{T}t\right)'\cdot\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left\{\left(\frac{1}{T}\cdot 0+1\right)\cdot\sin\left(n\frac{2\pi}{T}0\right)-\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{-T}{2}+1\right)\cdot\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{-T}{2}\right)-\int_{-T/2}^{0}\frac{1}{T}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$+\frac{1}{n\pi}\left\{\frac{1}{T}\frac{T}{2}\cdot\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)-\frac{1}{T}0\cdot\sin\left(n\frac{2\pi}{T}0\right)-\int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(0-0-\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right)+\frac{1}{n\pi}\left(0-0-\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right)$$

$$=-\frac{1}{n\pi T}\left(\int_{-T/2}^{0}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt+\int_{0}^{T/2}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right)=\frac{-1}{n\pi T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt=0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot \sin n\omega_0 t\ dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)\cdot \sin n\omega_0 t\ dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}t\cdot \sin n\omega_0 t\ dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)\cdot \frac{\left(-\cos n\omega_0 t\right)'}{n\omega_0}\ dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}t\cdot \frac{\left(-\cos n\omega_0 t\right)'}{n\omega_0}\ dt$$

$$= \frac{-2}{n\omega_0 T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)\cdot \left(\cos n\omega_0 t\right)'\ dt + \frac{-2}{n\omega_0 T}\int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}t\cdot \left(\cos n\omega_0 t\right)'\ dt$$

$$= \frac{-2}{n\cdot 2\pi}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)\cdot \left(\cos n\frac{2\pi}{T}t\right)'\ dt + \frac{-2}{n\cdot 2\pi}\int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}t\cdot \left(\cos n\frac{2\pi}{T}t\right)'\ dt$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left\{\left[\left(\frac{1}{T}t+1\right)\cdot \cos n\frac{2\pi}{T}t\right]_{-T/2}^{0} - \int_{-T/2}^{0}\left(\frac{1}{T}t+1\right)'\cdot \cos n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$+\frac{-1}{n\pi}\left\{\left[\frac{1}{T}t\cdot \cos n\frac{2\pi}{T}t\right]_{0}^{T/2} - \int_{0}^{T/2}\left(\frac{1}{T}t\right)'\cdot \cos n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left\{\left(\frac{1}{T}\cdot 0+1\right)\cdot \cos\left(n\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - \left(\frac{1}{T}\cdot\frac{-T}{2}+1\right)\cdot \cos\left(n\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{-T}{2}\right) - \int_{-T/2}^{0}\frac{1}{T}\cos n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$+\frac{-1}{n\pi}\left\{\frac{1}{T}\frac{T}{2}\cdot \cos\left(n\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T}\cdot 0\cdot \cos\left(n\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) - \int_{0}^{T/2}\frac{1}{T}\cos n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left\{1\cdot \cos 0 - \frac{1}{2}\cos(-n\pi) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0}\cos n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$+\frac{-1}{n\pi}\left\{\frac{1}{2}\cos n\pi - 0 - \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2}\cos n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left\{1-\frac{1}{2}\cos n\pi - \frac{1}{T}\left[\frac{\sin n\frac{2\pi}{T}t}{n\frac{2\pi}{T}}\right]_{-T/2}^{0}\right\} + \frac{-1}{n\pi}\left\{\frac{1}{2}\cos n\pi - \frac{1}{T}\left[\frac{\sin n\frac{2\pi}{T}t}{n\frac{2\pi}{T}}\right]_{0}^{T/2}\right\}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left(1-\frac{1}{2}\cos n\pi - \frac{1}{T}(0-0)\right) + \frac{-1}{n\pi}\left(\frac{1}{2}\cos n\pi - \frac{1}{T}(0-0)\right) = \frac{-1}{n\pi}$$

$$b_1 = -\frac{1}{\pi},\quad b_2 = -\frac{1}{2\pi},\quad b_3 = -\frac{1}{3\pi},\quad b_4 = -\frac{1}{4\pi},\quad b_5 = -\frac{1}{5\pi},\quad b_6 = -\frac{1}{6\pi}$$

$$\cdots\ b_n = \frac{-1}{n\pi}\ \cdots$$

以上の結果を $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right)$ に代入すると，目的とするフーリエ級数展開は次のようになる．

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sin\omega_0 t-\frac{1}{2\pi}\sin 2\omega_0 t-\frac{1}{3\pi}\sin 3\omega_0 t-\frac{1}{4\pi}\sin 4\omega_0 t-\frac{1}{5\pi}\sin 5\omega_0 t \quad \cdots+\frac{-1}{n\pi}\sin n\omega_0 t$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\sin\omega_0 t+\frac{1}{2}\sin 2\omega_0 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t+\frac{1}{4}\sin 4\omega_0 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t \quad \cdots+\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t\cdots\right)$$

（３） $f(t)=\frac{2}{T}t+1 \quad \left(-\frac{T}{2}\leqq t<0\right)$ ， $f(t)=\frac{2}{T}t \quad \left(0<t\leqq\frac{T}{2}\right)$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\ dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)\ dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{2}{T}t\ dt=\frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\frac{t^2}{2}+t\right]_{-T/2}^{0}+\frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{T/2}=\frac{1}{2}$$

a_n と b_n の計算には，部分積分 $\int_a^b f(t)\cdot g'(t)\ dt=\left[f(t)\cdot g(t)\right]_a^b-\int_a^b f'(t)\cdot g(t)\ dt$ を使う．また，計算の途中では $\omega_0 T=2\pi$ およびこれを変形した $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ を代入する．

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cdot\cos n\omega_0 t\ dt=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)\cdot\cos n\omega_0 t\ dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{2}{T}t\cdot\cos n\omega_0 t\ dt$$
$$=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)\cdot\frac{(\sin n\omega_0 t)'}{n\omega_0}\ dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{2}{T}t\cdot\frac{(\sin n\omega_0 t)'}{n\omega_0}\ dt$$
$$=\frac{2}{n\omega_0 T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)\cdot(\sin n\omega_0 t)'\ dt+\frac{2}{n\omega_0 T}\int_{0}^{T/2}\frac{2}{T}t\cdot(\sin n\omega_0 t)'\ dt$$
$$=\frac{2}{n\cdot 2\pi}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)\cdot\left(\sin n\frac{2\pi}{T}t\right)'\ dt+\frac{2}{n\cdot 2\pi}\int_{0}^{T/2}\frac{2}{T}t\cdot\left(\sin n\frac{2\pi}{T}t\right)'\ dt$$
$$=\frac{1}{n\pi}\left\{\left[\left(\frac{2}{T}t+1\right)\cdot\sin n\frac{2\pi}{T}t\right]_{-T/2}^{0}-\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)'\cdot\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$
$$+\frac{1}{n\pi}\left\{\left[\frac{2}{T}t\cdot\sin n\frac{2\pi}{T}t\right]_{0}^{T/2}-\int_{0}^{T/2}\left(\frac{2}{T}t\right)'\cdot\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$
$$=\frac{1}{n\pi}\left(0-0-\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right)+\frac{1}{n\pi}\left(0-0-\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right)$$
$$=-\frac{2}{n\pi T}\int_{-T/2}^{0}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt-\frac{2}{n\pi T}\int_{0}^{T/2}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt$$
$$=\frac{-2}{n\pi T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin n\frac{2\pi}{T}t\ dt=0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot \sin n\omega_0 t\ dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)\cdot \sin n\omega_0 t\ dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{2}{T}t\cdot \sin n\omega_0 t\ dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)\cdot \frac{\left(-\cos n\omega_0 t\right)'}{n\omega_0}\ dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\frac{2}{T}t\cdot \frac{\left(-\cos n\omega_0 t\right)'}{n\omega_0}\ dt$$

$$= \frac{-2}{n\omega_0 T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)\cdot \left(\cos n\omega_0 t\right)'\ dt + \frac{-2}{n\omega_0 T}\int_{0}^{T/2}\frac{2}{T}t\cdot \left(\cos n\omega_0 t\right)'\ dt$$

$$= \frac{-2}{n\cdot 2\pi}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)\cdot \left(\cos n\frac{2\pi}{T}t\right)'\ dt + \frac{-2}{n\cdot 2\pi}\int_{0}^{T/2}\frac{2}{T}t\cdot \left(\cos n\frac{2\pi}{T}t\right)'\ dt$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left\{\left[\left(\frac{2}{T}t+1\right)\cdot \cos n\frac{2\pi}{T}t\right]_{-T/2}^{0} - \int_{-T/2}^{0}\left(\frac{2}{T}t+1\right)'\cdot \cos n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$+ \frac{-1}{n\pi}\left\{\left[\frac{2}{T}t\cdot \cos n\frac{2\pi}{T}t\right]_{0}^{T/2} - \int_{0}^{T/2}\left(\frac{2}{T}t\right)'\cdot \cos n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left\{1\cdot \cos 0 - 0\cdot \cos(-n\pi) - \int_{-T/2}^{0}\frac{2}{T}\cdot \cos n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$+ \frac{-1}{n\pi}\left\{1\cdot \cos n\pi - 0 - \int_{0}^{T/2}\frac{2}{T}\cdot \cos n\frac{2\pi}{T}t\ dt\right\}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left\{1 - \frac{2}{T}\left[\frac{\sin n\frac{2\pi}{T}t}{n\frac{2\pi}{T}}\right]_{-T/2}^{0}\right\} + \frac{-1}{n\pi}\left\{\cos n\pi - \frac{2}{T}\left[\frac{\sin n\frac{2\pi}{T}t}{n\frac{2\pi}{T}}\right]_{0}^{T/2}\right\}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left\{1 - \frac{2}{T}(0-0)\right\} + \frac{-1}{n\pi}\left\{\cos n\pi - \frac{2}{T}(0-0)\right\} = \frac{-1}{n\pi}\left(1+\cos n\pi\right) = \frac{-1}{n\pi}\left(1+(-1)^n\right)$$

$b_1 = 0$, $b_2 = -\frac{1}{\pi}$, $b_3 = 0$, $b_4 = -\frac{1}{2\pi}$, $b_5 = 0$, $b_6 = -\frac{1}{3\pi}$

$b_7 = 0$, $b_8 = -\frac{1}{4\pi}$, $b_9 = 0$, $b_{10} = -\frac{1}{5\pi}$ ・・・ $b_n = -\frac{1+(-1)^n}{n\pi}$ ・・・

以上の結果を $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right)$ に代入すると，目的とするフーリエ級数展開は次のようになる．

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin 2\omega_0 t - \frac{1}{2\pi}\sin 4\omega_0 t - \frac{1}{3\pi}\sin 6\omega_0 t - \frac{1}{4\pi}\sin 8\omega_0 t - \frac{1}{5\pi}\sin 10\omega_0 t \cdots - \frac{1+(-1)^n}{n\pi}\sin n\omega_0 t \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\sin 2\omega_0 t + \frac{1}{2}\sin 4\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 6\omega_0 t + \frac{1}{4}\sin 8\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 10\omega_0 t \cdots + \frac{1+(-1)^n}{n}\sin n\omega_0 t \cdots\right)$$

【8-2】

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\cos\omega t\ dt=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot\cos\omega t\ dt+\int_{0}^{\tau} 1\cdot\cos\omega t\ dt+\int_{\tau}^{\infty} 0\cdot\cos\omega t\ dt=\int_{0}^{\tau}\cos\omega t\ dt$$

$$=\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_0^{\tau}=\frac{\sin\omega\tau}{\omega}$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\sin\omega t\ dt=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot\sin\omega t\ dt+\int_{0}^{\tau} 1\cdot\sin\omega t\ dt+\int_{\tau}^{\infty} 0\cdot\sin\omega t\ dt=\int_{0}^{\tau}\sin\omega t\ dt$$

$$=\left[\frac{-\cos\omega t}{\omega}\right]_0^{\tau}=\frac{-1}{\omega}\left(\cos\omega\tau-\cos 0\right)=\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\ dt=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot e^{-i\omega t}\ dt+\int_{0}^{\tau} 1\cdot e^{-i\omega t}\ dt+\int_{\tau}^{\infty} 0\cdot e^{-i\omega t}\ dt=\int_{0}^{\tau} e^{-i\omega t}\ dt=\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_0^{\tau}$$

$$=\frac{e^{-i\omega\tau}-e^{0}}{-i\omega}=\frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega\tau}-1\right)=\frac{i}{\omega}\left\{\cos(-\omega\tau)+i\sin(-\omega\tau)-1\right\}=\frac{\sin\omega\tau}{\omega}+i\left(\frac{\cos\omega\tau-1}{\omega}\right)$$

【8-3】

（1）

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{T}t & \left(-\dfrac{T}{2}\leqq t\leqq\dfrac{T}{2}\right)\\[2ex] 0 & \left(t<-\dfrac{T}{2},\quad \dfrac{T}{2}<t\right)\end{cases}$$

$F(\omega)$ の計算には部分積分を使う.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\ dt$$

$$=\int_{-\infty}^{-T/2} 0\cdot e^{-i\omega t}\ dt+\int_{-T/2}^{T/2}\frac{2}{T}t\cdot e^{-i\omega t}\ dt+\int_{T/2}^{\infty} 0\cdot e^{-i\omega t}\ dt=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{2}{T}t\cdot\frac{(e^{-i\omega t})'}{-i\omega}\ dt$$

$$=\frac{1}{-i\omega}\left\{\left[\frac{2}{T}t\cdot e^{-i\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2}-\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{2}{T}t\right)'\cdot e^{-i\omega t}\ dt\right\}$$

$$=\frac{1}{-i\omega}\left\{\frac{2}{T}\frac{T}{2}e^{-i\frac{\omega T}{2}}-\frac{2}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)e^{i\frac{\omega T}{2}}-\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t}\ dt\right\}$$

$$=\frac{1}{-i\omega}\left\{e^{-i\frac{\omega T}{2}}+e^{i\frac{\omega T}{2}}-\frac{2}{T}\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-T/2}^{T/2}\right\}$$

$$=\frac{i}{\omega}\left\{\cos\left(-\frac{\omega T}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\omega T}{2}\right)+\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)+\frac{2}{i\omega T}\left(e^{-\frac{i\omega T}{2}}-e^{\frac{i\omega T}{2}}\right)\right\}$$

$$=\frac{i}{\omega}\left\{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)+\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)+\frac{2}{i\omega T}\left(e^{-\frac{i\omega T}{2}}-e^{\frac{i\omega T}{2}}\right)\right\}$$

$$=\frac{i}{\omega}\left\{2\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)+\frac{2}{i\omega T}\left(\cos\left(-\frac{\omega T}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\omega T}{2}\right)-\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)\right\}$$

$$=\frac{i}{\omega}\left\{2\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)+\frac{2}{i\omega T}\left(\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)-\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)\right\}$$

$$=\frac{i}{\omega}\left\{2\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)+\frac{2}{i\omega T}\left(-2i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)\right\}$$

$$=i\left\{\frac{2}{\omega}\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)-\frac{4}{\omega^2 T}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right\}$$

（2）

$$f(t)=\begin{cases}1-\dfrac{4}{T^2}t^2 & \left(-\dfrac{T}{2}\leqq t\leqq\dfrac{T}{2}\right)\\[2ex] 0 & \left(t<-\dfrac{T}{2},\quad \dfrac{T}{2}<t\right)\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{-T/2}0\cdot e^{-i\omega t}\,dt+\int_{-T/2}^{T/2}\left(1-\frac{4}{T^2}t^2\right)\cdot e^{-i\omega t}\,dt+\int_{T/2}^{\infty}0\cdot e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-T/2}^{T/2}\left(1-\frac{4}{T^2}t^2\right)\cdot\frac{(e^{-i\omega t})'}{-i\omega}\,dt$$

$$=\frac{1}{-i\omega}\left\{\left[\left(1-\frac{4}{T^2}t^2\right)\cdot e^{-i\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2}-\int_{-T/2}^{T/2}\left(1-\frac{4}{T^2}t^2\right)'\cdot e^{-i\omega t}\,dt\right\}$$

$$=\frac{1}{-i\omega}\left\{0-0-\int_{-T/2}^{T/2}\left(-\frac{8}{T^2}t\right)\cdot e^{-i\omega t}\,dt\right\}=\frac{8}{-i\omega T^2}\left\{\int_{-T/2}^{T/2}t\cdot e^{-i\omega t}\,dt\right\}$$

$$=\frac{8}{-i\omega T^2}\left\{\int_{-T/2}^{T/2}t\cdot\frac{(e^{-i\omega t})'}{-i\omega}\,dt\right\}=\frac{8}{(-i\omega)^2T^2}\left\{\int_{-T/2}^{T/2}t\cdot(e^{-i\omega t})'\,dt\right\}$$

$$=\frac{8}{-\omega^2T^2}\left\{\left[t\cdot e^{-i\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2}-\int_{-T/2}^{T/2}(t)'\cdot e^{-i\omega t}\,dt\right\}=\frac{8}{-\omega^2T^2}\left\{\frac{T}{2}e^{-\frac{i\omega T}{2}}-\left(\frac{-T}{2}e^{\frac{i\omega T}{2}}\right)-\int_{-T/2}^{T/2}e^{-i\omega t}\,dt\right\}$$

$$=\frac{8}{-\omega^2T^2}\left\{\frac{T}{2}\left(e^{-\frac{i\omega T}{2}}+e^{\frac{i\omega T}{2}}\right)-\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-T/2}^{T/2}\right\}$$

$$=\frac{8}{-\omega^2T^2}\left[\frac{T}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\omega T}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\omega T}{2}\right)+\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right\}+\frac{1}{i\omega}\left(e^{-\frac{i\omega T}{2}}-e^{\frac{i\omega T}{2}}\right)\right]$$

$$=\frac{8}{-\omega^2T^2}\left[\frac{T}{2}\left\{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)+\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right\}+\frac{1}{i\omega}\left(e^{-\frac{i\omega T}{2}}-e^{\frac{i\omega T}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{8}{-\omega^2 T^2}\left\{T\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \frac{1}{i\omega}\left\{\cos\left(-\frac{\omega T}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\omega T}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right\}\right\}$$

$$= \frac{8}{-\omega^2 T^2}\left[T\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \frac{1}{i\omega}\left\{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{8}{-\omega^2 T^2}\left[T\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \frac{1}{i\omega}\left\{-2i\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{8}{-\omega^2 T^2}\left\{T\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right\}$$