久保謙一著『解析力学』における式(4.36)の計算

Y. Ohnuki

Jan 2010

久保謙一著『解析力学』(裳華房 2001；以下 I と引用) のページ 84，式 (4.36) において，$[Q_i,\, \partial W/\partial t]_{qp}$ の計算がなされている．しかし正しい答に達していない．以下では，演算が長くなるのをいとわず，敢えて久保氏の流儀で一貫したらどうなるかを記すことにする．もちろん正しい結論が導かれるが，この方法が教育上適切であるかどうかは疑問である．

なお煩雑だが無用な混乱を防ぐために，関数の変数はいちいち書くことにし，また

$$f(q,Q,t)\big|_{(q,p,t)} \equiv f(q,Q,t)\big|_{Q=(q,p,t)} = f(q,Q(q,p,t),t) \tag{1}$$

なる記法を用い，さらに

$$W_t(q,Q,t) \equiv \frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial t} \tag{2}$$

としよう．

ポアソン括弧の定義

$$[A,\, B]_{qp} = \sum_j \Big(\frac{\partial A(q,p,t)}{\partial q_j}\frac{\partial B(q,p,t)}{\partial p_j} - \frac{\partial A(q,p,t)}{\partial p_j}\frac{\partial B(q,p,t)}{\partial q_j} \Big) \tag{3}$$

に従い，まず次の計算から出発する．(計算は一切手抜きせず愚直に行う．)

$$\begin{aligned}
&[Q_i,\, W_t(q,Q,t)]_{qp} \\
&= \sum_k \Big(\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial q_k}\frac{\partial W_t(q,Q(q,p,t),t)}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k}\frac{\partial W_t(q,Q(q,p,t),t)}{\partial q_k} \Big) \\
&= \sum_{j,k} \Big(\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial p_k}\frac{\partial W_t(q,Q,t)}{\partial Q_j}\Big|_{(q,p,t)} - \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k}\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial q_k}\frac{\partial W_t(q,Q,t)}{\partial Q_j}\Big|_{(q,p,t)} \Big) \\
&\qquad\qquad - \sum_k \frac{\partial^2 W(q,Q,t)}{\partial t \partial q_k}\Big|_{(q,p,t)} \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k} \\
&= \sum_j [Q_i,\, Q_j]_{qp} \frac{\partial W_t(q,Q,t)}{\partial Q_j}\Big|_{(q,p,t)} - \sum_k \frac{\partial^2 W(q,Q,t)}{\partial t \partial q_k}\Big|_{(q,p,t)} \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k}
\end{aligned} \tag{4}$$

以上は機械的な式の変形であるが，話を進めるために次の二つの式を証明する．

$$[Q_i,\, Q_j]_{qp} = 0. \tag{5}$$

$$\sum_k \frac{\partial^2 W(q,Q,t)}{\partial t \partial q_k}\Big|_{(q,p,t)} \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k} = -\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial t}. \tag{6}$$

これらの導出はすぐあとに述べるが，(5) と (6) を (4) に用いれば

$$[Q_i,\, W_t(q,Q,t)]_{qp} = \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial t} \tag{7}$$

を得る．右辺の符号が I の (4.37) と逆符号であることに注意しよう．(7) を I の (4.35) に代入すれば，ただちに期待した式 (4.38) すなわち

$$\dot{Q}_i = [Q_i,\, \mathcal{H}]_{qp} \tag{8}$$

が与えられる．

そこで (5) および (6) の証明に移ろう．

(5) の証明：

これはポアソン括弧が正準不変であることの結果であるが，I の 84 ページでは，母関数 $W(q,Q,t)$ に基づいて正準変換を与えているので，あえてそれを使って証明することにする．すなわち

$$p_i = \frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial q_i} \tag{9}$$

を用いよう．これを Q について解き，解 $Q = Q(q,p,t)$ が定まるためには，第 i 行第 j 列の要素が

$$\Delta_{ij} \equiv \frac{\partial^2 W(q,Q,t)}{\partial q_i \partial Q_j} \tag{10}$$

の行列 Δ に対し，その行列式 $\det \Delta$ が

$$\det \Delta \neq 0 \tag{11}$$

を満たさなければならない．(11) は正準変換が $W(q,Q,t)$ により生成されるための必要条件である．これはまた逆行列 Δ^{-1} の存在を保証する．さて (9) の右辺の Q に解 $Q(q,p,t)$ を代入すると恒等式

$$p_i = \frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial q_i}\Big|_{(q,p,t)} \tag{12}$$

を得る．この両辺を q_k または p_k で微分をすると

$$0 = \frac{\partial^2 W(q,Q,t)}{\partial q_i \partial q_k}\Big|_{(q,p,t)} + \sum_j \frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial q_i \partial Q_j}\Big|_{(q,p,t)} \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial q_k}\,, \tag{13}$$

$$\delta_{ik} = \sum_j \frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial q_i \partial Q_j}\Big|_{(q,p,t)} \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial p_k}\,. \tag{14}$$

ここで $\varDelta$ を変数 q，p，t を用いて書いておくと，(13)，(14) から恒等式

$$\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial q_k} = -\sum_j (\varDelta^{-1})_{ij} \frac{\partial^2 W(q,Q,t)}{\partial q_j \partial q_k}\Big|_{(q,p,t)} \tag{15}$$

$$\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k} = (\varDelta^{-1})_{ik} \tag{16}$$

が導かれる．よって (15)，(16) から

$$\sum_k \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial q_k} \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial p_k} = -\sum_{k,\,l} (\varDelta^{-1})_{il}\,(\varDelta^{-1})_{jk}\, \frac{\partial^2 W(q,Q,t)}{\partial q_l \partial q_k}\Big|_{(q,p,t)} \tag{17}$$

を得る．このとき右辺は $i \leftrightarrow j$ で不変，それゆえ左辺もこの性質をもち

$$\begin{aligned}[Q_i,\, Q_j]_{qp} &= \sum_k \Big(\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial q_k} \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial q_k} \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k} \Big) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{18}$$

が成立する．すなわち式 (5) は証明された．

(6) の証明：

(9) は，左辺の p_i が q, Q, t の関数であることを示す．それを $p_i(q,Q,t)$ と書こう．すなわち $p_i = p_i(q,Q,t)$ であって

$$(6)\text{ の左辺} = \sum_k \frac{\partial p_k(q,Q,t)}{\partial t}\Big|_{(q,p,t)} \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k} \tag{19}$$

と書くことができる．他方，$p_i = p_i(q,Q,t)$ に (9) の解 $Q_i(q,p,t)$ を用いた式 $p_i = p_i(q,Q(q,p,t),t)$ は恒等式であって，右辺は q, p, t の関数といっても，q にも t にも依存しない．したがって

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\, p_k(q,Q(q,p,t),t) \\ &= \sum_j \frac{\partial p_k(q,Q,t)}{\partial Q_j}\Big|_{(q,p,t)} \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial t} + \frac{\partial p_k(q,Q,t)}{\partial t}\Big|_{(q,p,t)} \end{aligned} \tag{20}$$

それゆえ

$$\frac{\partial p_k(q,Q,t)}{\partial t}\Big|_{(q,p,t)} = -\frac{\partial p_k(q,Q,t)}{\partial Q_j}\Big|_{(q,p,t)}\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial t} \tag{21}$$

よってこれに $\partial Q_i(q,p,t)/\partial p_k$ をかけて，k について和をとると (19) より

$$\begin{aligned}(6)\text{ の左辺} &= -\sum_{j,\,k}\frac{\partial p_k(q,Q,t)}{\partial Q_j}\Big|_{(q,p,t)}\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial t}\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k} \\ &= -\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{22}$$

を得る．すなわち (6) が導かれた．

蛇足かも知れぬが，(22) においては

$$\begin{aligned}\sum_k \frac{\partial p_k(q,Q,t)}{\partial Q_j}\Big|_{(q,p,t)}\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k} &= \sum_k \frac{\partial p_k(q,Q,t)}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_k}\Big|_{(q,p,t)} \\ &= \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial Q_j(q,p,t)} = \delta_{ij}\end{aligned} \tag{23}$$

が用いられた．これは $\{p_i\}$ と $\{Q_i\}$ の関係が，(9) と (11) を介して，一意であることによる．